UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ENTROPÍA TOPOLÓGICA

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Daniel Sánchez Rodríguez

ASESOR DE TESIS:

Dr. Enrique Castañeda Alvarado

El Cerrillo, Piedras Blancas, México

8 de noviembre de 2024

Introducción

Para comprender la dinámica de algunos fenomenos, físicos, químicos, biológicos, económicos o sociales, los matemáticos diseñan modelos que representan esos fenomenos. Unos de los modelos más analizados son las funciones continuas definidas en el conjunto de los números reales y un poco más general en espacios métricos. De manera concreta al estudiar esta dinámica se analiza la órbita de un elemento bajo la función, es decir, la suseción

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots f^k(x) \dots$$

donde x es un elemento del dominio X y $f : X \to X$ es una función continua. Por ejemplo, podemos preguntarnos que sucede con las órbitas de dos puntos cercanos, ¿será cierto que sus órbitas permanecen cercanas? si la respuesta a la pregunta es positiva podemos interpretar que el comportamiento dinámico es estable. Pero si existieran puntos suficientemente cercanos cuyas órbitas se alejan entre sí estariamos en presencia de un sistema dinámico inestable, o en términos prácticos podriamos decir que es impredecible. Enfrentar sistemas inestables ha llevado a diversas caracterizaciones de lo que es un sistema dinámico caótico (un sistema con dinámica muy complicada).

En este trabajo estudiamos el concepto de entropía topológica la cual nos permite definir y cuantificar el caos. Por lo que el trabajo se compone de tres capítulos en el primero se dan los conceptos básicos sobre la dinámica de funciones, el Teorema de Sharkovskii y las propiedades básicas sobre cubiertas, estas últimas son fundamentales para poder definir el concepto de entropía topológica, lo cual se hace en el segundo capítulo donde también estudiamos sus propiedades y determinamos la entropia de la función tienda. Finalmente, en el capítulo tres analizamos la entropia positiva y su relación con el caos.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo proporcionamos los conceptos básicos sobre la dinámica de funciones, el Teorema de Sharkovskii y las propiedades básicas sobre cubiertas, estas últimas son fundamentales para poder definir el concepto de entropía topológica, para los conceptos básicos de topología que se emplean en este trabajo y no se enuncian se sugiere consultar el libro de J. Munkres [5].

1.1. Dinámica de funciones

Comenzamos esta sección introduciendo la definición de espacio métrico.

Definición 1. *Sea X un conjunto. Una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una métrica sobre X si para cualesquiera $x, y, z \in X$ se cumple lo siguiente:*

(1) $d(x, y) \geq 0$,

(2) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$,

(3) $d(x, y) = d(y, x)$,

(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definición 2. *A la pareja* (X, d) *con* d *una métrica sobre* X *le llamamos* ***espacio métrico****.*

Sea (X, d) un espacio métrico. Dada $\epsilon > 0$ y $x \in X$, denotamos como $B_\epsilon(x)$ a la **Bola abierta** de radio ϵ y centro en x, definida como $B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$. En la Figura 1.1 se muestra una idea gráfica de una bola abierta.

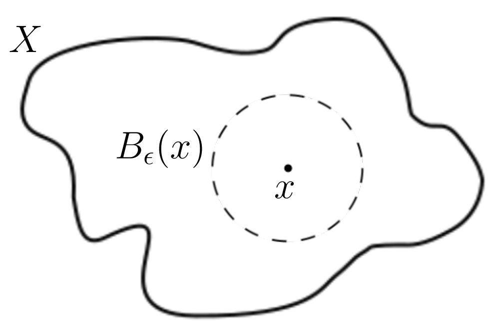

Figura 1.1: Bola abierta de radio ϵ y centro en x.

Ejemplo 3. *Sea* X *un conjunto no vacío. Consideremos la función* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$*, definida por la regla de correspondecia:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 \ \text{si} \ x \neq y, \\ 0 \ \text{si} \ x = y. \end{cases}$$

Afirmación: *La función d es una métrica*

En efecto:

(1) *Se sigue inmediatamente de la regla de correspondencia de d.*

(2) *De igual manera que en* (1), $d(x,y)=0$ si, y solamente si $x=y$.

(3) Procedemos mediante los dos casos siguientes.

Caso 1. Cuando $d(x,y)=1$, se tiene que $x\neq y$, esto es equivalente a decir que $y\neq x$. Así, $d(y,x)=1$.

Caso 2. Cuando $d(x,y)=0$, se tiene que $x=y$, esto es equivalente a decir que $y=x$. Así, $d(y,x)=0$.

(4) Para demostrar la última parte tenemos los siguientes casos:

- Si $x=y=z$, entonces
$$d(x,y)=0=d(x,z)=d(x,z)+0=d(x,z)+d(z,y).$$

- Si $x\neq y$, $y=z$, entonces
$$d(x,y)=1=d(x,z)=d(x,z)+0=d(x,z)+d(z,y).$$

- Si $x=y$, $y\neq z$, entonces
$$d(x,y)=0\leq d(x,z)\leq d(x,z)+d(z,y).$$

- Si $x\neq y$, $y\neq z$, entonces
$$d(x,y)=1=d(x,z)\leq d(x,z)+1=d(x,z)+d(z,y).$$

Así, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$.

Por lo tanto, d es una métrica.

A esta métrica se le conoce como la *métrica discreta* sobre el conjunto X. Y (X, d) se llama espacio métrico discreto.

Ejemplo 4. *Consideremos la función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por la regla de correspondencia:*

$$d(x,y) = \mid x - y \mid .$$

Podemos observar que d es una métrica sobre $\mathbb{R}$.

En efecto, sean $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(1) *Por la definición del valor absoluto $d(x,y) \geq 0$.*

(2) *Supongamos que $d(x,y) = \mid x - y \mid = 0$, entonces $x - y = 0$. Así, $x = y$. Ahora, si $x = y$, $x - y = 0$, más aún $\mid x - y \mid = 0$. Por tanto $d(x,y) = 0$.*

(3) *Notemos que $x - y = -(y - x)$, entonces*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \mid x - y \mid \\ &= \mid -(y - x) \mid \\ &= \mid y - x \mid \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

(4) *Por la desigualdad triangular*

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(z,y) &= \mid x - z \mid + \mid z - y \mid \\ &\geq \mid (x - z) + (z - y) \mid \\ &= \mid x - y \mid \\ &= d(x,y). \end{aligned}$$

Esto concluye que d es una métrica sobre $\mathbb{R}$. A esta se le conoce como la métrica usual en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, la pareja $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico.

Ejemplo 5. *Consideremos el conjunto*

$$F = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua } \}.$$

Sea $d : F \times F \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como: $d(f, g) = \text{máx}\,\{| f(t) - g(t) | : t \in [a, b]\}$. La función d es una métrica sobre F.
En efecto, sean $f, g \in F$.

(1) *Notemos que para todo $t \in [a, b]$,*

$$d(f, g) \geq | f(t) - g(t) | \geq 0.$$

(2) *Supongamos que $f = g$, así para cada $t \in [a, b]$, $f(t) = g(t)$, esto implica que $| f(t) - g(t) | = 0$ para todo $t \in [a, b]$. Luego*

$$\underset{t \in [a.b]}{\text{máx}} | f(t) - g(t) | = 0.$$

Así, $d(f, g) = 0$.
Ahora, supongase que $d(f, g) = \text{máx}\,\{| f(t) - g(t) | : t \in [a, b]\} = 0$. Así para todo $t \in [a, b]$, $| f(t) - g(t) | = 0$, por lo tanto, $f(t) = g(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Concluimos que, $f = g$.

(3) *Notemos que para todo $t \in [a, b]$, $| f(t) - g(t) | = | g(t) - f(t) |$, por lo que*

$$\underset{t \in [a,b]}{\text{máx}} | f(t) - g(t) | = \underset{t \in [a,b]}{\text{máx}} | g(t) - f(t) | .$$

Por lo tanto, $d(f, g) = d(g, f)$.

(4) *Notemos que para cada $t \in [a,b]$, se tiene que:*

$$| f(t) - h(t) | \leq \text{máx}\{| f(t) - h(t) |: t \in [a,b]\} \; y$$

$$| h(t) - g(t) | \leq \text{máx}\{| h(t) - g(t) |: t \in [a,b]\}.$$

Así, para cada $t \in [a,b]$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} | f(t) - h(t) | + | h(t) - g(t) | \leq \text{máx}\{| f(t) - h(t) |: t \in [a,b]\} \\ + \text{máx}\{| h(t) - g(t) |: t \in [a,b]\}. \end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $t \in [a,b]$,

$$| f(t) - g(t) | \leq | f(t) - h(t) | + | h(t) - g(t) |,$$

luego

$$\begin{aligned} \text{máx}\{| f(t) - g(t) |: t \in [a,b]\} \leq \text{máx}\{| f(t) - h(t) |: t \in [a,b]\} \\ + \text{máx}\{| h(t) - g(t) |: t \in [a,b]\}. \end{aligned}$$

Así,

$$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g).$$

Por lo que (F,d) es un espacio métrico.

Notación. 6. *Sea $f : X \to X$ una función. El símbolo f^n representa la composición de la función f consigo misma n veces: $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, y así sucesivamente. A la función $f^n : X \to X$ se le llama iteración de f. Definimos $f^0 : X \to X$ como la función identidad en X.*

Definición 7. *Sean X un espacio métrico y $f : X \longrightarrow X$ una función continua. Para cada punto $x \in X$, a la sucesión*

$$\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), \dots\}$$

se le conoce como la órbita *de x bajo f y la denotamos como $o(x, f)$.*

Para comprender esta definición gráficamente la representamos en la Figura 1.2.

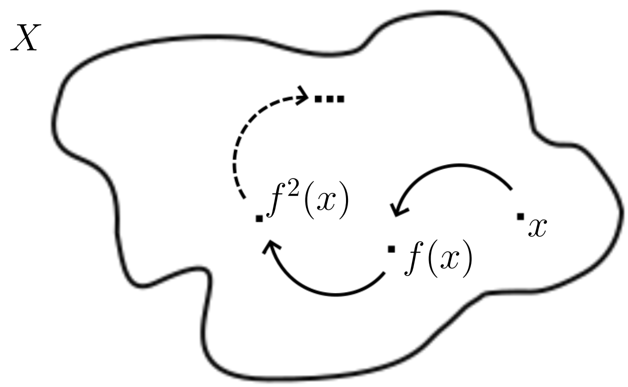

Figura 1.2: Órbita de x bajo la función f.

Definición 8. *Sean $f : X \longrightarrow X$ una función continua y $x_0 \in X$. Decimos que x_0 es un* punto periódico *de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos como $Per(f)$, véase la Figura 1.3.*

Definición 9. *Si $x \in Per(f)$, decimos que $o(x, f)$ es una órbita periódica.*

Definición 10. *Sea $x_0 \in Per(f)$. Decimos que x_0 tiene periodo k, si*

$$k = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}.$$

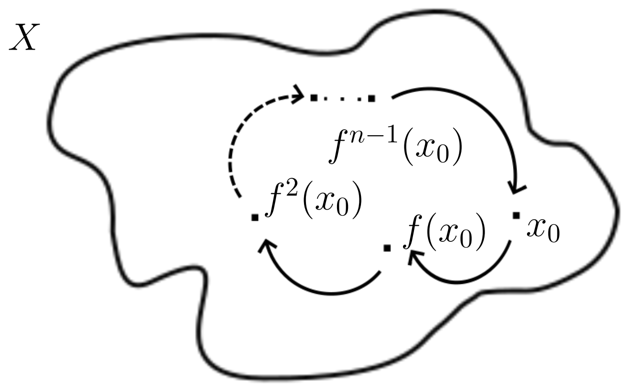

Figura 1.3: Órbita de un punto periódico, x_0, de f.

En estos términos tenemos la siguiente observación.

Observación 1. *Sean $f : X \longrightarrow X$ una función continua y $x_0 \in X$.*

(1) *Si x_0 es un punto fijo de f, entonces $x_0 \in Per(f)$ y x_0 tiene periodo 1.*

(2) *Si x_0 es un punto periódico de f de periodo k, con $k \geq 2$, entonces para cada $1 \leq j < k$ se tiene que $f^j(x_0)$ es distinto de x_0.*

Notación. 11. *Sea $f : X \longrightarrow X$ una función. Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de puntos periódicos de f, de periodo n, se denota por $Per_n(f)$. Es decir,*

$$Per_n(f) = \{x \in Per(f) : x \text{ es de periodo } n\}.$$

Ejemplo 12. *Sea $f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$, definida por la regla de correspondencia $f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}(x + 1)\right)$. A continuación evaluamos a -1 bajo la segunda iteración de f, la cual esta expresada por*

$$f^2(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x + 1)\right) + 1\right]\right).$$

$$\begin{aligned}
f^2(-1) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(-1+1)\right)+1\right]\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}(\cos(0)+1)\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}(1+1)\right)\\
&= \cos(\pi)\\
&= -1.
\end{aligned}$$

De lo anterior podemos decir que -1 *es un punto períodico de periodo 2 y que* $o(-1, f)$ *es una órbita periódica.*

Ejemplo 13. *Sea* $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *la función definida por la regla de correspondencia:*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & si\ x \leq \dfrac{1}{2}, \\ 2-2x, & si\ x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

A esta función se le conoce como la función Tienda, *y su gráfica se muestra en la Figura 1.4 .*

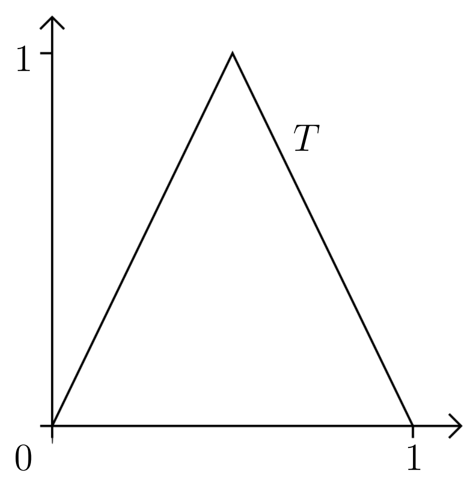

Figura 1.4: Gráfica de la función Tienda.

En esta función tienda T, para $\frac{2}{5} \in [0,1]$ tenemos que

$$T\left(\frac{2}{5}\right) = 2\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5},$$

$$T^2\left(\frac{2}{5}\right) = T\left(T\left(\frac{2}{5}\right)\right) = T\left(\frac{4}{5}\right) = 2 - 2\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5},$$

$$T^3\left(\frac{2}{5}\right) = T\left(T^2\left(\frac{2}{5}\right)\right) = T\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

Podemos notar que a partir de la tercer iteración el proceso anterior es periódico. Por lo tanto,

$$o\left(\frac{2}{5}, T\right) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \dots\right\}.$$

El punto $\frac{2}{5}$ resulta ser un punto periódico de T, pues $T^2\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}$. Con esto decimos que $o\left(\frac{2}{5}, T\right)$ es una orbita periódica y el mínimo periodo es dos.

Ejemplo 14. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada por $f(x) = 1 - x$. Como la única solución a la ecuación $1 - x = x$ es $x = \frac{1}{2}$, f tiene un solo punto fijo. Por otro lado, $f^2(x) = x$ para todo punto $x \in \mathbb{R}$. De aquí, se sigue que todos los puntos distintos de $\frac{1}{2}$ son puntos periódicos bajo f de periodo 2.*

En el ejemplo siguiente hallamos todos los puntos periódicos de una función determinada.

Ejemplo 15. *Sean $I = [0,1]$ y $f : I \longrightarrow I$ la función con la regla de correspondencia $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. De acuerdo a la Definición 8, la idea principal es encontrar un subconjunto $J \subset I$, tal que para cada $x \in J$, exista un $n \in \mathbb{N}$ talque $f^n(x) = x$.*

Para esto nos será de mucha ayuda probar lo siguiente:

Si n es un número natural par, entonces $f^n(x) = x$, para cada $x \in I$.

En efecto, consideremos $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$. Procedemos de manera inductiva sobre k. Sea $x \in I$. Para $k = 1$, se tiene que

$$f^2(x) = \sqrt{1 - \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2} = \sqrt{1 - (1 - x^2)} = \sqrt{x^2} = x.$$

Supongamos que la afirmación es valida para $k - 1$, es decir $f^{2(k-1)}(x) = x$. Ahora, para el paso inductivo, tenemos que

$$f^{2k}(x) = f^{2(k-1)+2}(x) = f^2\left(f^{2(k-1)}(x)\right) = f^2\left(x\right) = x.$$

Ya probado lo anterior, afirmamos que $Per(f) = I$.

En efecto, la primer contención se sigue de la Definición 8. Por otro lado, sea $x \in I$, como $f^n(x) = x$ para todo número par, esto implica automaticamente que $x \in Per(f)$. Por lo tanto, $Per(f) = I$.

1.2. Teorema de Sharkovskii

Consideremos a los números naturales ordenados de la siguiente manera. Por conveniencia técnica usaremos el simbolo $\triangleright$ para denotar este orden y a todo el arreglo lo llamaremos Tabla S.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
3 & \rhd & 5 & \rhd & 7 & \rhd & 9 & \rhd \cdots \\
2\cdot 3 & \rhd & 2\cdot 5 & \rhd & 2\cdot 7 & \rhd & 2\cdot 9 & \rhd \cdots \\
2^2\cdot 3 & \rhd & 2^2\cdot 5 & \rhd & 2^2\cdot 7 & \rhd & 2^2\cdot 9 & \rhd \cdots \\
2^3\cdot 3 & \rhd & 2^3\cdot 5 & \rhd & 2^3\cdot 7 & \rhd & 2^3\cdot 9 & \rhd \cdots \\
2^4\cdot 3 & \rhd & 2^4\cdot 5 & \rhd & 2^4\cdot 7 & \rhd & 2^4\cdot 9 & \rhd \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \rhd & 2^5 & \rhd & 2^4 & \rhd & 2^3 & \rhd & 2^2 & \rhd & 2 & \rhd & 1.
\end{array}$$

En el primer renglón de la Tabla S aparece la infinidad de números impares. En el segundo, estos mismos impares pero multiplicados por 2; en el tercero, los impares multiplicados por 2^2, y así sucesivamente (en el $k+1$-ésimo renglón están los impares multiplicados por 2^k). Finalmente, en el último renglón aparecen todas las potencias de 2. Nótese que esta lista abarca a todos los números naturales y que el último renglón está en orden inverso al de todos los demás renglones.

Por definición, el símbolo $\rhd$ (que representa al orden Sharkovskiiano) significa lo siguiente: $n \rhd m$ si, y sólo sí, m está en el mismo renglón que n pero a la derecha de éste, o en algún renglón abajo del renglón que ocupa n. De igual manera, $n \rhd m$ si, y sólo sí, n está en el mismo renglón que m pero a la izquierda de éste, o en algún renglón arriba del renglón que ocupa m.

Lema 16. *Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow A$ una función continua. Si J es un subintervalo compacto de A tal que $J \subset f(J)$, entonces f tiene un punto fijo en J.*

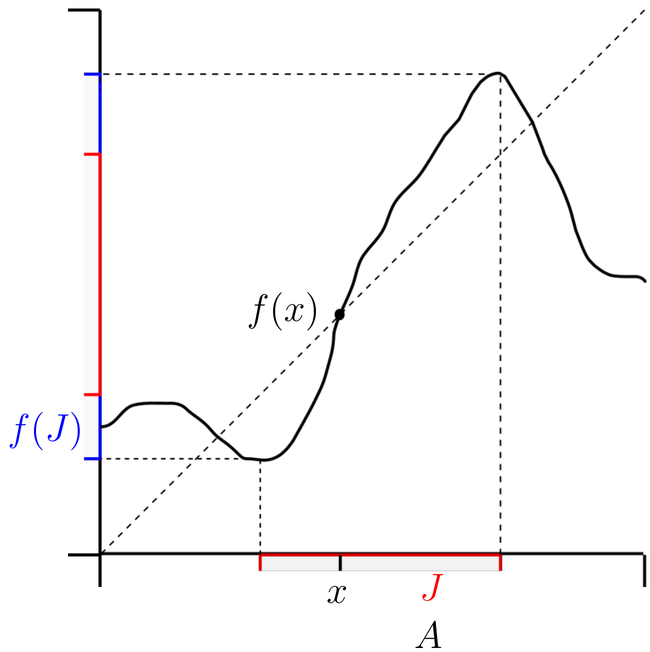

Figura 1.5: Existencia de un punto fijo x en el intevalo J respecto a la función f.

Demostración. Sea $J = [a, b]$. Definamos la función $g : J \longrightarrow A$ con la regla de correspondencia $g(x) = f(x) - x$. consideremos los siguientes casos:

1) $f(a) \leq a$ y $b \leq f(b)$,

2) $f(b) \leq a$ y $b \leq f(a)$,

3) $a \leq f(a)$ y $b \leq f(b)$,

4) $a \leq f(a)$ y $f(b) \leq b$,

5) $a \leq f(b)$ y $b \leq f(a)$,

6) $a \leq f(a)$ y $f(a) \leq b$.

Supongamos que se cumple el caso 1) entonces $f(a) - a \leq 0$ y $0 \leq f(b) - b$. Por el Teorema del valor intermendio, existe $y \in J$ tal que

$$0 = g(y) = f(y) - y,$$

de lo anterior podemos decir que efecivamante f tiene un punto fijo en J. Ahora, si se cumple el caso 2) entonces $0 \leq f(a) - a$ y $f(b) - b \leq 0$. Nuevamente por el Teorema del valor intermedio se tiene que existe $y' \in J$ tal que $g(y') = 0$, así $f(y') = y'$. Por lo tanto, f tiene un punto fijo en J.
Los demás casos se muestran de manera similar. $\square$

Ejemplo 17. *Consideremos la función tienda T definida en el intervalo $I = [0,1]$ y a $J = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Notemos que $f(J) = [0,1]$, entonces por el Lema 16 existe $x_0 \in J$ el cual es un punto fijo. En efecto, resolviendo la ecuación $2 - 2x = x$ el punto fijo resulta ser $x_0 = \frac{2}{3}$.*

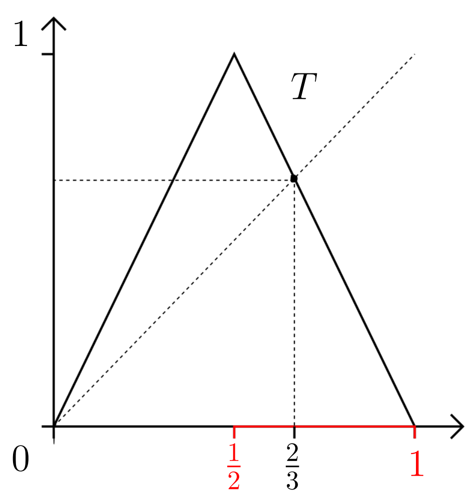

Figura 1.6: Gráfica del Ejemplo 17.

Lema 18. *Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow A$ una función continua. Si J y K son subintervalos compactos de A tales que $K \subset f(J)$, entonces hay un subintervalo compacto $L \subset J$ tal que $f(L) = K$.*

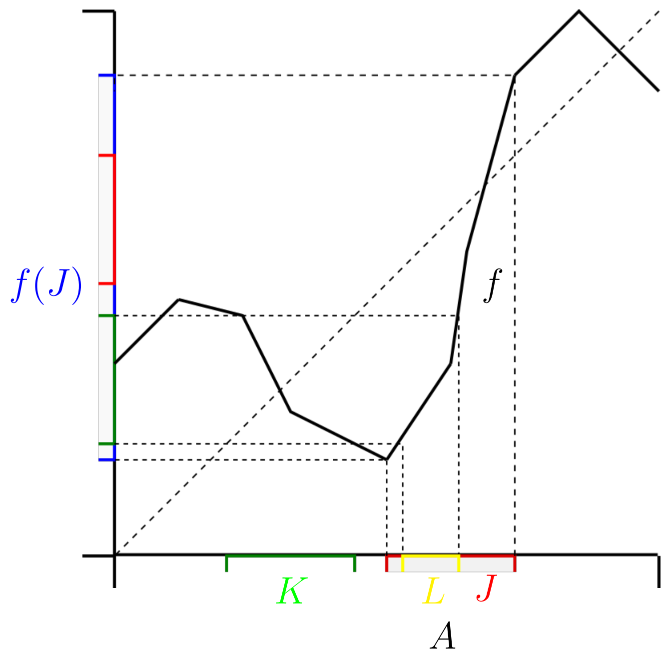

Figura 1.7: Gráfica que expresa el resultado del Lema 18.

Demostración. Sea $K = [a, b]$. Como $K \subset f(J)$, existe al menos un elemento $x \in J$, tal que $f(x) = a$. Del mismo modo para b, existe por lo menos un elemento $y \in J$ tal que $f(y) = b$. Supongamos que

$$c = \text{máx}\{x \in J : f(x) = a\} < d = \text{mín}\{y \in J : f(y) = b\}.$$

Por la continuidad de f, podemos decir que $L = [c, d]$, es tal que $f(L) = K$. Ahora si $d < c$, Consideremos

$$c' = \text{máx}\{x \in J : x < c, f(x) = b\} \text{ y } d' = \text{mín}\{x \in J : x > d, f(x) = a\},$$

nuevamente por la continuidad de f, $L = [c', d']$ es tal que $f(L) = K$. $\square$

Ejemplo 19. *Consideremos la función* $f(x) = x^2$ *definida en el intervalo* $[0, 1]$ *y los intervalos* $J = \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$, $K = \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$.
Dado que $f(J) = \left[\frac{25}{64}, \frac{9}{16}\right]$, *se tiene que* $K \subset f(J)$. *Por el Lema 18, existe un intervalo* $L \subset J$, *tal que* $f(L) = K$, *de hecho el intervalo es* $L = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Lema 20. *Sean* A *un intervalo de* $\mathbb{R}$ *y* $f : A \longrightarrow A$ *una función continua. Si* $J_0, J_1, ..., J_m$ *son subintervalos compactos de* A *tales que* $J_k \subset f(J_{k-1})$ *donde* $1 \leq k \leq m$, *entonces hay un subintervalo compacto* $L \subset J_0$ *tal que* $f^m(L) = J_m$ *y* $f^k(L) \subset J_k$ *para* $1 \leq k < m$. *Si también* $J_0 \subset J_m$, *entonces existe un punto* y *tal que* $f^m(y) = y$ *y* $f^k(y) \in J_k$ *donde* $1 \leq k < m$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre m para la primera parte del lema.
El caso $m = 1$ se cumple por el Lema 18. Sea $m > 1$ y supongamos que el resultado se cumple para $m - 1$, es decir, supongamos que el Lema es cierto cuando tenemos m intervalos que cumplen las hipótesis. Sean $J_0, J_1, \ldots, J_n$ tales que $J_{i+1} \subset f(J_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Aplicamos la hipótesis de inducción a los intervalos $J_1, J_2, \ldots, J_n$, entonces existe un intervalo compacto $K_1 \subset J_1$ tal que $f^i(K_1) \subset J_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, n-2$, y $f^{n-1}(k_1) = J_n$. Por el Lema 18, existe un intervalo compacto $K \subset J_0$ tal que $f(K) = K_1$ y, consecuentemente,

$$f^i(K) = f^{i-1}(f(K)) = f^{i-1}(K_1) \subset J_i$$

para $i = 1, \ldots, n-1$, y

$$f^n(K) = f^{n-1}(K_1) = J_n.$$

La segunda parte del lema se sigue de la primera y del Lema 16. $\square$

A continuación, se muestra un ejemplo para el caso $m = 4$.

Ejemplo 21. *Sea* $f : [0,4] \longrightarrow [0,4]$ *definida por la regla de correspondencia*

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}, & si \quad 0 \leq x \leq 1, \\ -2x + 4, & si \quad 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{x}{2} - 1, & si \quad 2 \leq x \leq 3, \\ 2x - \frac{11}{2}, & si \quad 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Consideremos los intervalos $J_0 = [3,4]$, $J_1 = [1,2]$, $J_2 = [0,1]$ *y* $J_3 = [2,3]$, *notemos que*

$$\begin{aligned} f(J_0) &= \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right], \\ f(J_1) &= [0,2], \\ f(J_2) &= \left[2, \frac{7}{2}\right], \\ f(J_3) &= \left[0, \frac{1}{2}\right], \end{aligned}$$

es decir, $J_k \subset f(J_{k-1})$ *para todo* $1 \leq k \leq 3$. *Entonces, por el Lema 20, existe un intervalo* $L \subset J_0$ *tal que* $f^3(L) = J_3$.

Definición 22. *Sean* A *un intervalo de* $\mathbb{R}$ *y* $f : A \longrightarrow A$ *una función continua. Supongamos que* f *tiene una órbita periódica de periodo* $n > 1$. *Sean* $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ *los puntos de esta órbita y* $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ *donde* $1 \leq j < n$. *La* digráfica asociada *a la orbita periódica se define de la siguiente manera.*

Los vértices de la digráfica son los subintervalos $I_1, ..., I_{n-1}$ *y dibujamos una*

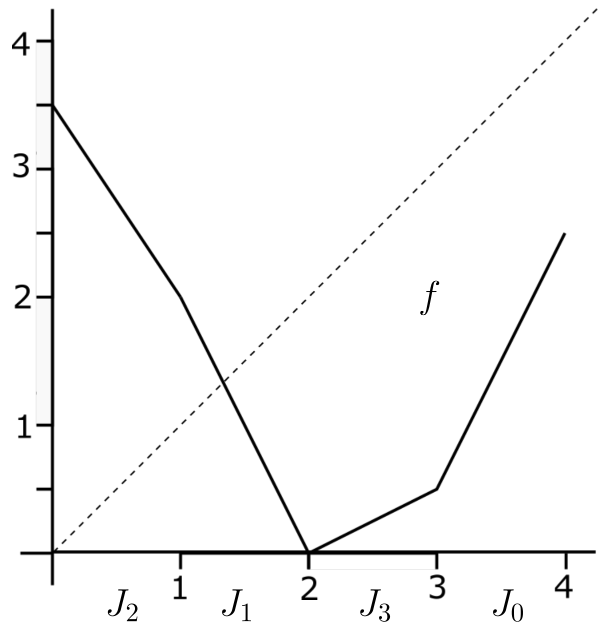

Figura 1.8: Gráfica del Ejemplo 21.

flecha de I_j a I_k ($I_j \to I_k$) si I_k está contenido en el intervalo $f(I_j)$. A la digráfica así construida, en la literatira, se le llama gráfica de Markov asociadad a la órbita periódica. Al intervalo $f(I_j)$, por conveniencia los escribiremos como $\langle f(x_j), f(x_{j+1})\rangle$ esto significa que los puntos extremos del intervalo son $f(x_j)$ y $f(x_{j+1})$ no importando el orden.

Ejemplo 23. *Supongamos que c es un punto periódico de periodo 3 con $f(c) < c < f^2(c)$. La digráfica correspondiente tiene dos vértices, a saber, los intervalos $I_1 = [f(c), c]$ y $I_2 = [c, f^2(c)]$, conectadas de alguna de estas formas:*

$$\overset{\curvearrowleft}{I_1} \rightleftarrows I_2.$$

$$\curvearrowleft \qquad \curvearrowleft$$

$$I_1 \rightleftarrows I_2.$$

Ejemplo 24. *En el siguiente ejemplo contruyamos una digráfica asociada a una órbita determinada por la función* $f : [0,4] \longrightarrow [0,4]$ *definida por la regla de correspondencia:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & si \quad 0 \leq x \leq 2, \\ -3x+10, & si \quad 2 \leq x \leq 3, \\ 2x-5, & si \quad 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Notemos que $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(4) = 3$ *y* $f(3) = 1$ *de lo que tenemos la órbita* $o(f,1) = \{1,2,4,3\}$ *de periodo* 4.

Ahora bien, consideremos los intervalos $I_1 = [1,2]$, $I_2 = [2,3]$ *y* $I_3 = [3,4]$. *Entonces*

$$\begin{aligned} I_2, I_3 \subset \langle f(1), f(2) \rangle &= \langle 2,4 \rangle, \\ I_1, I_2, I_3 \subset \langle f(2), f(3) \rangle &= \langle 4,1 \rangle, \\ I_1, I_2 \subset \langle f(3), f(4) \rangle &= \langle 1,3 \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto la digáfica asociada a $o(f,1)$ *es*

$$\begin{tikzcd} I_1 \arrow[rr] \arrow[dr, shift left] & & I_2 \arrow[dl, shift left] \\ & I_3 \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 25. *Consideremos una función continua* $f : A \longrightarrow A$ *definida en un intervalo* A *de* $\mathbb{R}$, *la cual tiene una órbita de periodo* 5 *recorrida en el* *orden*

$$f^3(a) < f(a) < a < f^2(a) < f^4(a).$$

Seleccionemos los intervalos de la siguiente manera:

$$I_1 = \left[f^3(a), f(a)\right], I_2 = [f(a), a], I_3 = \left[a, f^2(a)\right], I_4 = \left[f^2(a), f^4(a)\right].$$

Podemos observar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
I_4 &\subset \left\langle f\left(f^3(a)\right), f\left(f(a)\right)\right\rangle = \left\langle f^4(a), f^2(a)\right\rangle = \left[f^2(a), f^4(a)\right], \\
I_2, I_3 &\subset \left\langle f\left(f(a)\right), f(a)\right\rangle = \left\langle f^2(a), f(a)\right\rangle = \left[f(a), f^2(a)\right], \\
I_1 &\subset \left\langle f(a), f\left(f^2(a)\right)\right\rangle = \left\langle f(a), f^3(a)\right\rangle = \left[f^3(a), f(a)\right], \\
I_1, I_2 &\subset \left\langle f\left(f^2(a)\right), f\left(f^4(a)\right)\right\rangle = \left\langle f^3(a), a\right\rangle = \left[f^3(a), a\right].
\end{aligned}$$

Con esto la digráfica correspondiente se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
I_1 \arrow[r, shift left] & I_4 \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\
I_3 \arrow[u] & I_2 \arrow[l] \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Proposición 26. *Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow A$ una función continua. Supongamos que f tiene una órbita periódica de periodo $n > 1$. La digráfica asociada a esta órbita siempre contiene un lazo.*

Demostración. Sean $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ los distintos puntos de esta órbita y $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ donde $1 \leq j < n$. Sea $y \in I_j$ para algún $1 \leq j < n$. Notemos que $f(x_1) > x_1$ y $f(x_n) < x_n$, luego $f(x_j) > x_j$ y $f(x_{j+1}) < x_{j+1}$, esto implica que $f(x_j) \geq x_{j+1}$ y $f(x_{j+1}) \leq x_j$, de esto se sigue que $y \in [f(x_{j+1}), f(x_j)]$. Así $I_j \subset \langle f(x_j), f(x_{j+1}) \rangle$. Por lo tanto, $I_j \to I_j$. $\square$

Definición 27. *Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow A$ una función continua. Supongamos que f tiene una órbita periódica de periodo $n > 1$. El ciclo $J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$ de longitud n en la digráfica asociada se dirá que es un* ciclo fundamental*, si J_0 contiene un punto final c tal que $f^k(c)$ es un punto final de J_k para algún $1 \leq k < n$. El ciclo fundamental siempre existe y es único.*

Observación 2. *Si el ciclo fundamental*

$$J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_{n-1} \to J_0$$

contiene el vértice J_k al menos dos veces para algún $0 \leq k < n$, entonces se puede descomponer en ciclos de menor longitud, cada uno de los cuales contiene J_k sólo una vez.

Definición 28. *Se dice que un ciclo en una digráfica asociada es primitivo si no es posible encontrar un ciclo de menor longitud en el mismo.*

Lema 29. *Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow A$ una función continua, tal que f tiene un punto periódico de periodo $n > 1$. Si la digráfica asociada contiene un ciclo primitivo*

$$J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_{m-1} \to J_0$$

de longitud m*, entonces* f *tiene un punto periódico* y *de periodo* m *tal que* $f^k(y) \in J_k$ *donde* $0 \leq k < m$*.*

Demostración. Por el Lema 20 existe un punto y tal que $f^m(y) = y$ y $f^k(y) \in J_k$ donde $0 \leq k < m$. Dado que el ciclo es primitivo y los intervalos distintos J_k tienen como máximo un punto final en común, se sigue que y tiene periodo m. A menos que posiblemente $y = x_i$ para algunos i y n sea un divisor de m. Sin embargo, esto es posible sólo si el ciclo esta contenido en el ciclo fundamental ya que, dado J_{k-1}, las condiciones $f^k(y) \in J_k$ y $J_{k-1} \to J_k$ determinan de manera única a J_k. □

Proposición 30. *Sean* A *un intervalo en* $\mathbb{R}$*,* $f : A \longrightarrow A$ *una función continua y* $n \in \mathbb{N}$*. Si* f *tiene un punto periódico de periodo mayor que* 1*, entonces* f *tiene un punto fijo y un punto periódico de periodo* 2*.*

Demostración. Podemos decir que f tiene una órbita periódica de periodo $n > 1$, por la Proposición 26, la digráfica asociada a esta órbita siempre tiene un lazo, digamos $I_j \to I_j$ para algún $1 \leq j \leq n$, esto implica que $I_j \subset \langle f(x_j), f(x_{j+1}) \rangle$.

Sin perdida de generalidad, supongamos que $I_j \subset [f(x_j), f(x_{j+1})]$, por la continuidad de la función, existe un punto $y \in I_j$ tal que $f(y) = y$. Por lo tanto, f tiene un punto fijo.

Sea n el menor número entero positivo mayor que 1 tal que f tenga un punto periódico de periodo n. Si $n > 2$ entonces el ciclo fundamental se descompone en dos ciclos de menor longitud, cada uno de los cuales es primitivo. Dado que alguno de estos tiene una longitud mayor que 1, del Lema 29 se deduce que hay un punto periódico con un periodo estrictamente entre 1 y n, lo cual contradice que se tenia un punto periódico de periodo n. □

La demostración de los siguientes dos resultados se pueden consultar en [1].

Lema 31. *Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow A$ una función continua. Si $a \in A$ es un punto periódico de f de periodo n, entonces para cualquier entero positivo k, a es un punto periódico de f^k de periodo $\dfrac{n}{MCD(n,k)}$, donde $MCD(n,k)$ denota el máximo común divisor de n y k.*

Proposición 32. *Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow A$ una función continua. Si f tiene un punto periódico de periodo impar $n > 1$, entonces f tiene puntos periódicos de orden par arbitrarios y puntos periódicos arbitrarios de orden impar mayores a n.*

El siguiente teorema se debe a Sharkovskii y la demostración completa se puede consultar en [4, Teorema 3.11, p. 39] en este trabajo solo realiamos la prueba de la primera parte.

Teorema 33. *(Teorema de Sharkovskii) Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}$.*

(1) *Si una función continua $f : A \longrightarrow A$ tiene un punto de periodo n y $n \rhd m$, entonces f tiene un punto periódico de periodo m.*

(2) *Si $m \rhd n$, entonces existe una función continua $f : A \longrightarrow A$ que tiene periodo n pero no tiene periodo m.*

(3) *Existe una función continua $f : A \longrightarrow A$ que tiene puntos periódicos de periodo 2^k para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y no tiene puntos periódicos de ningún otro periodo.*

Demostración. (1) Sean $d, q \in \mathbb{N}$, tales que $n = 2^d \cdot q$ donde q es un número impar. Supongamos que $q = 1$, entonces $n = 2^d$ y $m = 2^e$, donde $0 \leq e < d$.

Notemos que si $d = 1$ implica que $e = 0$, por la Proposición 30, se tiene que f tiene un punto de periodo 1 lo que concluye, para $n = 2$, la prueba del Teorema de Sharkovskii.

De lo anterior podemos suponer que $e > 0$. Consideremos el entero positivo 2^{e-1}, por el Lema 31, existe un punto periódico de $f^{2^{e-1}}$ de periodo

$$\frac{2^d}{MCD(2^d, 2^{e-1})} = 2^{d-e+1}.$$

Por la Proposición 30, $f^{2^{e-1}}$ cuenta con un punto de periodo 2. Sea x_0 dicho punto, es decir, $x_0 = \left(f^{\frac{m}{2}}\right)^2 (x_0) = f^m(x_0)$. Así, este punto tiene un periodo m para f.

Ahora Supongamos que $q > 1$ y $m = 2^d \cdot r$ donde $r \in \mathbb{N}$.

Los casos restantes a considerar son:

(i) cuando r es par y

(ii) cuando r es impar y $r > q$.

Usando de nuevo el Lema 31, para el entero positivo 2^d se tiene que f^{2^d} cuenta con un punto periódico de periodo

$$\frac{2^d \cdot q}{MCD(2^d \cdot q, 2^d)} = q$$

Y por la Proposición 32, f^{2^d} tiene un punto periódico de periodo r, digamos $x_r \in A$, es decir, $x_r = \left(f^{2^d}\right)(x_r) = f^m(x_r)$.

En el caso (i) este punto tiene periodo $m = 2^d \cdot r$ para f.

En el caso (ii) f tiene un punto de periodo $2^e \cdot r$ para algún $e \leq d$.

Si $e = d$ habríamos terminado, pero si $e < d$ podemos reemplazar $n = 2^e \cdot r$. Ya que $m = 2^e(2^{d-e}r)$, se sigue del caso (i) que f tiene un punto periódico de periodo m.

Ahora, hagamos la prueba para $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Sean $x_1, x_n \in A$ los puntos menor y mayor respectivamente de una órbita periódica, de f, de periodo n. Consideremos al conjunto $K = [x_1, x_n] \cup f([x_1, x_n])$, el cual es un intervalo compacto. Definamos la función $g : K \longrightarrow K$ dada por la regla de correspondencia:

$$g(x) = \begin{cases} f(x_1) & \text{si } x \leq x_1, \\ f(x) & \text{si } x \in [x_1, x_n], \\ f(x_n) & \text{si } x \geq x_n. \end{cases}$$

Como g tiene una órbita periódica de periodo n, g también tiene una órbita periódica de periodo m. Ya que esta órbita de periodo m está contenida en el intervalo $[x_1, x_n]$, también es una órbita periódica de f, con esto, concluimos diciendo que efectivamente existe un punto periódico, de f, de periodo m.

□

1.3. Propiedades de cubiertas abiertas

Definición 34. *Una **cubierta** para un conjunto A en un espacio métrico X es una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, tal que:*

$$A \subset \bigcup \mathcal{C}.$$

*Diremos que una cubierta es **abierta** si sus elementos son subconjuntos abiertos de X.*

Ejemplo 35. *Consideremos el conjunto de números reales y la familia* $\mathcal{F} = \{B_\epsilon(x) : x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\}$. *Notemos que* $\mathcal{F}$ *es una cubierta abierta para* $\mathbb{R}$, *pues, dado* $x \in \mathbb{R}$ *un elemento arbitrario, se tiene que* $x \in B_\epsilon(x)$, *más aún* $x \in \bigcup \mathcal{F}$, *por tanto* $\mathbb{R} \subset \bigcup \mathcal{F}$. *Lo que concluye que* $\mathcal{F}$ *es una cubierta abierta para* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 36. *Sea* $p \in (0,1)$. *Consideremos*

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n} \right) \subset \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Afirmación: $\mathcal{C}$ *es una cubierta abierta para* $I = [0,1]$.
Para cualquier $n \geq 1$, *dado* $x \in \left(p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n} \right)$ *implica que* $p - \frac{1}{n} < x < p + \frac{1}{n}$, *es decir,* $x \in (p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}) \subset (p-1, p+1)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y como* $p - 1 < 0 < p < 1 < p + 1$, *se sigue que*

$$I \subset (p-1, p+1) = \bigcup \mathcal{C}.$$

$\bigcup \mathcal{C}$. *Lo que concluye que efectivamente* $\mathcal{C}$ *es una cubierta abierta para* I.

Ejemplo 37. *Sean* $x \in \mathbb{R}$ *y* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, *consideremos el subconjunto* $\{x\} \times [a,b] \subset \mathbb{R}^2$ *y la familia*

$$\mathcal{C} = \{B_{\frac{b-a}{3}}(x,y) \subset \mathbb{R}^2 : y \in [a.b]\}.$$

Afirmación: $\mathcal{C}$ *es una cubierta abierta para* $\{x\} \times [a,b]$.
Sea $(x,y) \in \{x\} \times [a,b]$, *entonces* $(x,y) \in B_{\frac{b-a}{3}}(x,y)$, *más aún,* $(x,y) \in \bigcup \mathcal{C}$. *Por lo tanto,* $\{x\} \times [a,b] \subset \bigcup \mathcal{C}$. *Concluimos diciendo que* $\mathcal{C}$ *es una cubierta abierta para* $\{x\} \times [a,b]$.

Definición 38. *Dada una cubierta* $\mathcal{C}$ *para* $A \subset X$. *Una* ***subcubierta*** *es una subcolección de* $\mathcal{C}$ *que es cubierta para* A.

Ejemplo 39. *La familia* $\mathcal{F} = \{(x-1, x+1) \subset \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$ *es una subcubierta abierta de la cubierta* $\mathcal{C}$ *definida en el Ejemplo 35.*

Notemos que $B_\epsilon(x) = (x-\epsilon, x+\epsilon)$, *entonces para* $\epsilon = 1$, *se tiene que* $(x-1, x+1) \in \mathcal{C}$. *Por lo tanto,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$, *entonces* $x \in (x-1, x+1)$, *esto implica que*

$$x \in \bigcup_{x \in \mathbb{R}} (x-1, x+1).$$

Por lo tanto, $\mathbb{R} \subset \bigcup \mathcal{F}$. *Esto concluye que* $\mathcal{F}$ *es una subcubierta abierta de* $\mathcal{C}$ *que cubre a* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 40. *Sean* m *un número natural fijo y* $\mathcal{C}$ *definida como en el Ejemplo 36. Consideremos*

$$\mathcal{C}_m = \left\{ \left(p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n} \right) \in \mathcal{C} : n \leq m \right\}.$$

$\mathcal{C}_m$ *es una subcubierta de* $\mathcal{C}$ *que cubre a* I, *pues todo elemento de* $\mathcal{C}_m$ *es elemento de* $\mathcal{C}$ *y* $(p-1, p+1) \in \mathcal{C}_m$.

Ejemplo 41. *Consideremos la subcolección*

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ B_{\frac{b-a}{3}}(a), B_{\frac{b-a}{3}}\left(\frac{b-a}{2}\right), B_{\frac{b-a}{3}}(b) \right\}.$$

Podemos decir que $\mathcal{C}_0$ *es una subcubierta de* $\mathcal{C}$ *definida en el Ejemplo 37.*

Notemos que $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$. *Solo nos falta ver que* $\mathcal{C}_0$ *también es una cubierta abierta para* $\{x\} \times [a, b]$.

Sea $(x, y) \in \{x\} \times [a, b]$.

- ***Caso 1.*** *Cuando* $a \leq y < \frac{b-a}{3}$.

  Notemos que

  $$B_{\frac{b-a}{3}}(a) \cap (\{x\} \times [a, b]) = \{x\} \times \left[a, \frac{b-a}{3}\right),$$

entonces $(x,y) \in B_{\frac{b-a}{3}}(a) \cap (\{x\} \times [a,b])$.

- ***Caso 2.*** *Cuando* $\dfrac{b-a}{3} \leq y \leq \dfrac{2}{3}(b-a)$.

  Notemos que

  $$B_{\frac{b-a}{3}}\left(\frac{b-a}{2}\right) \cap (\{x\} \times [a,b]) = \{x\} \times \left[\frac{b-a}{6}, \frac{5}{6}(b-a)\right].$$

  Así que $\dfrac{b-a}{6} \leq y \leq \dfrac{5}{6}(b-a)$, *esto implica que* $(x,y) \in \{x\} \times \left[\dfrac{b-a}{6}, \dfrac{5}{6}(b-a)\right]$, *por lo que*

  $$(x,y) \in B_{\frac{b-a}{3}}\left(\frac{b-a}{2}\right) \cap (\{x\} \times [a,b]).$$

- ***Caso 3.*** *Cuando* $\dfrac{2}{3}(b-a) < y \leq b$.

  Notemos que

  $$B_{\frac{b-a}{3}}(b) \cap (\{x\} \times [a,b]) = \{x\} \times \left[\frac{2}{3}(b-a), b\right].$$

  Por lo tanto, $(x,y) \in B_{\frac{b-a}{3}}(b) \cap (\{x\} \times [a,b])$.

De los tres casos anteriores podemos decir que $(x,y) \in \bigcup \mathcal{C}_0$, *siguiendo así que* $\{x\} \times [a,b] \subset \mathcal{C}_0$. *Por lo tanto,* $\mathcal{C}_0$ *es una subcubierta abierta de* $\mathcal{C}$ *que cubre a* $\{x\} \times [a,b]$.

Definición 42. *Se dice que un subconjunto A de un espacio métrico X es **compacto**, si toda cubierta abierta de A contiene una subcubierta finita para A.*

Ejemplo 43. *Consideremos el conjunto* $K = \left\{\dfrac{1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ *con la topología heredada por la topología estandar sobre* $\mathbb{R}$ *(La topología que es*

generada por intervalos abiertos). Sean α una cubierta abierta para K conformada por subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, el intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ contiene a todos los elementos $\frac{1}{n}$ salvo a un número finito de ellos.
En efecto, nótese que $\frac{1}{\epsilon} > 0$, por la propiedad arquimediana, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Por otro lado, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n_0$, entonces $\frac{1}{n_0} \geq \frac{1}{m}$, así $\frac{1}{m} < \epsilon$. Por lo tanto, $\frac{1}{m} \in (-\epsilon, \epsilon)$ para todo $m \geq n_0$.
Notemos que el conjunto $L = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n < n_0 \right\}$ tiene cardinalidad finita, esto implica que para cada elemento $\frac{1}{n}$ de L, existe un abierto U_n de α que lo contiene, es decir existe una cantidad finita de abiertos U_n pertenecientes a α. Así que,

$$K \subset (-\epsilon, \epsilon) \cup \bigcup_{n<n_0} U_n.$$

Sean $U_0 \in \alpha$ y $\epsilon_0 > 0$ tal que $(-\epsilon_0, \epsilon_0) \subset U_0$, siguiendo el procedimiento anterior pero para ϵ_0 encontramos una subcubierta finita de α que cubre a K.
Por lo tanto, concluimos diciendo que K es compacto.

Ejemplo 44. *Sean X un espacio métrico tal que $\mid X \mid = n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y α una cubierta abierta para X. Supongamos que $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, notemos que para cada $x_i \in X$, existe $A_i \in \alpha$ tal que $x_i \in A_i$, esto implica que*

$$x_i \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Así, X está contenido en la unión de cada A_i. Por lo tanto X es compacto.

A continuación presentamos algunas propiedades sobre cubiertas abiertas.

Definición 45. *Sean α, β cubiertas abiertas para X. Definimos:*

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}.$$

Proposición 46. *Sean α, β y γ cubiertas abiertas para X. Entonces,*

(1) *$\alpha \vee \beta$ también es cubierta abierta para X,*

(2) *$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha$,*

(3) *$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$.*

Demostración. (1) Sea $x \in X$. Como α y β son cubiertas abiertas para X, $x \in \bigcup \alpha$ y $x \in \bigcup \beta$. Luego $x \in A$ y $x \in B$ para algunos $A \in \alpha$ y $B \in \beta$. Así, $x \in A \cap B$. Con lo anterior tenemos que $x \in \bigcup(\alpha \vee \beta)$. Por lo tanto, $X \subset \bigcup(\alpha \vee \beta)$. Esto concluye que $\alpha \vee \beta$ es cubierta abierta para X.

(2) Sea $A \cap B \in \alpha \vee \beta$. Sabemos que para cualquier par de conjuntos $A \cap B = B \cap A$, entonces $A \cap B \in \beta \vee \alpha$. Así , $\alpha \vee \beta \subset \beta \vee \alpha$. Análogamente se prueba que $\beta \vee \alpha \subset \alpha \vee \beta$.

(3) Sea $A \cap (B \cap C) \in \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$. Sabemos que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Pero $(A \cap B) \cap C \in (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$, entonces

$$A \cap (B \cap C) \in (\alpha \vee \beta) \vee \gamma.$$

Análogamente se prueba que

$$(A \cap B) \cap C \in \alpha \vee (\beta \vee \gamma).$$

Por lo tanto,

$$\alpha \vee (\beta \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma.$$

□

Definición 47. *Sean α, β cubiertas abiertas para X. Decimos que β es un* ***refinamiento*** *de α, si para todo $B \in \beta$, existe $A \in \alpha$ $B \subset A$. Lo cual denotaremos como $\alpha < \beta$.*

Proposición 48. *Sean α, β, γ y η cuatro cubiertas abiertas para X. Entonces,*

(1) $\alpha < \alpha \vee \beta$, *y* $\beta < \alpha \vee \beta$,

(2) $\alpha < \alpha \vee \alpha$, *y* $\alpha \vee \alpha < \alpha$,

(3) *Si* $\alpha < \beta$, *entonces* $\alpha \vee \beta < \beta$,

(4) *Si* $\alpha < \beta$, *y* $\gamma < \eta$, *entonces* $(\alpha \vee \gamma) < (\beta \vee \eta)$.

Demostración. (1) Sea $A \cap B \in \alpha \vee \beta$. Notemos que $A \cap B \subset A$ donde $A \in \alpha$, por tanto $\alpha < \alpha \vee \beta$.
Análogamente se prueba que $\beta < \alpha \vee \beta$.

(2) consideremos $A \cap A \in \alpha \vee \alpha$. Sabemos que $A \cap A \subset A$ (De hecho son iguales). Donde $A \in \alpha$. Así $\alpha < \alpha \vee \alpha$.
De igual manera, dado $A \in \alpha$, $A \subset A \cap A$ donde $A \cap A \in \alpha \vee \alpha$. Por lo tanto $\alpha \vee \alpha < \alpha$.

(3) Sea $B \in \beta$. Como $\alpha < \beta$, existe $A \in \alpha$ tal que $B \subset A$, es decir $B \subset A \cap B$, donde $A \cap B \in \alpha \vee \beta$. Por lo tanto $\alpha \vee \beta < \beta$.

(4) Sea $B \cap D \in \beta \vee \eta$, $B \cap D \subset D$. Como $\alpha < \beta$, para B existe $A \in \alpha$ tal que $B \subset A$, por lo que $B \cap D \subset A$.

Del mismo modo $B \cap D \subset D$ y al ser $\gamma < \eta$ para D, existe $C \in \gamma$ tal que $D \subset C$, así $B \cap D \subset C$. Entonces $B \cap D \subset A \cap C$. Concluimos que

$$(\alpha \vee \gamma) < (\beta \vee \eta).$$

□

Definición 49. *Dados X es un espacio topológico y α una cubierta abierta para X, definimos*

$$N(\alpha) = \text{mín}\{\mid \beta \mid : \beta \textit{ es subcubierta finita de } \alpha \textit{ para } X\}.$$

Notese que si X es un espacio compacto, $N(\alpha)$ es finito para toda α cubierta abierta de X.

Proposición 50. *Sean α y β cubiertas abiertas para X.*

(1) *Si $\alpha < \beta$, $N(\alpha) \leq N(\beta)$,*

(2) *Si $\alpha < \beta$, $N(\alpha \vee \beta) = N(\alpha)$,*

(3) *$N(\alpha \vee \alpha) = N(\alpha)$,*

(4) *Si α y β son de cardinalidad finita, entonces $\mid \alpha \vee \beta \mid \leq \mid \alpha \mid\mid \beta \mid$.*

Demostración. (1) Sean γ y η subcubiertas abiertas de α y β respectivamente, tales que $N(\alpha) =\mid \gamma \mid$ y $N(\beta) =\mid \eta \mid$.

Sea $A \in \gamma$. Definamos el conjunto $\eta_A = \{B \in \eta : A \cap B \neq \emptyset\}$, como $\alpha < \beta$, $1 \leq\mid \eta_A \mid$ para todo $A \in \gamma$. Así, $\mid \gamma \mid\leq\mid \eta \mid$.

Por lo tanto, $N(\alpha) \leq N(\beta)$.

(2) Por (1) de la Proposición 48, sabemos que $\beta < \alpha \vee \beta$, por ser $\alpha < \beta$ se tiene que $\alpha \vee \beta < \beta$. Usando el primer inciso de esta proposición $N(\beta) \leq N(\alpha \vee \beta)$ y $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\beta)$.
Por lo tanto, $N(\alpha \vee \beta) = N(\beta)$.

(3) Sabemos que $\alpha < \alpha \vee \alpha$ y $\alpha \vee \alpha < \alpha$. Y por el inciso (1) de esta proposición $N(\alpha) \leq N(\alpha \vee \alpha)$ y $N(\alpha \vee \alpha) \leq N(\alpha)$. Por lo tanto, $N(\alpha \vee \alpha) = N(\alpha)$.

(4) Supongamos que $\mid \alpha \mid = m$, $\mid \beta \mid = n$ con $m, n \in \mathbb{N}$ y que $\alpha = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$.
Definamos $A_i \cap \beta = \{A_i \cap B : B \in \beta\}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$.
$\mid A_i \cap \beta \mid \leq n$ pues $\mid \beta \mid = n$.
Afirmación: $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m}(A_i \cap \beta) = \alpha \vee \beta$.
En efecto, si $x \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m}(A_i \cap \beta)$, entonces $x \in A_i \vee \beta$ para algún $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Es decir $x = A_i \cap B$ para algún $B \in \beta$ y $A_i \in \alpha$. Por lo tanto $x \in \alpha \vee \beta$.
Ahora sea $x \in \alpha \vee \beta$, eso nos lleva a que $x = A \cap B$ para algunos $A \in \alpha$ y $B \in \beta$. Es decir, $x = A_i \cap B$ para algún $i \in \{1, 2, ..., m\}$.Luego $x \in A_i \vee \beta$. Por ello $x \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m}(A_i \cap \beta)$.
Por lo tanto, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m}(A_i \cap \beta) = \alpha \vee \beta$.
Ahora,

$$\mid \alpha \vee \beta \mid \;=\; \mid \bigcup_{i=1}^{m}(A_i \cap \beta) \mid \leq mn = \mid \alpha \mid\mid \beta \mid .$$

$\square$

Proposición 51. *Sea α es cubierta abierta para X. Entonces,*

(1) *Si β es subcubierta abierta de α, entonces $\alpha < \beta$,*

(2) $N(\alpha) \leq\mid \alpha \mid$.

Demostración. (1) Sea $B \in \beta$. Como β es subcubierta de α, entonces $B \in \alpha$, dado que $B \subset B$ concluimos que $\alpha < \beta$.

(2) Sea β subcubierta abierta de α para X tal que $N(\alpha) =\mid \beta \mid$. Al ser β subcubierta de α para X, $\mid \beta \mid\leq\mid \alpha \mid$. Por lo tanto $N(\alpha) \leq\mid \alpha \mid$.

□

Proposición 52. *Sean α y β dos cubiertas abiertas para X, entonces $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha)N(\beta)$.*

Demostración. Sean γ y η subcubiertas de α y β repectivamente, tales que $\mid \gamma \mid= N(\alpha)$ y $\mid \eta \mid= N(\beta)$. Al ser γ y η finitas, por (4) de la Proposición 50,

$$\begin{aligned} \mid \gamma \vee \eta \mid &\leq \mid \gamma \mid\mid \eta \mid \\ &= N(\alpha)N(\beta). \end{aligned}$$

Como $\gamma \vee \eta$ es subcubierta de $\alpha \vee \beta$, por la proposición 51 $\alpha \vee \beta < \gamma \vee \eta$. Entonces, $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\gamma \vee \eta)$, por cosiguiente $N(\gamma \vee \eta) \leq\mid \gamma \vee \eta \mid$. Así,

$$N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha)N(\beta).$$

□

Definición 53. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, y α una cubierta abierta para Y. Definamos*

$$f^{-1}(\alpha) = \{f^{-1}(A) : A \in \alpha\}.$$

Proposición 54. *Sean α y β cubiertas abiertas para Y.*

(1) *$f^{-1}(\alpha)$ es cubierta abierta para X,*

(2) *Si $\alpha < \beta$, entonces $f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\beta)$,*

(3) *$f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}(\alpha) \vee f^{-1}(\beta)$.*

Demostración. (1) Si $x \in X$, entonces $f(x) \in Y$. Por lo que existe $A \in \alpha$ tal que $f(x) \in A$, así $x \in f^{-1}(A)$. Esto implica que $x \in \bigcup f^{-1}(\alpha)$. Por lo tanto, dado que f es continua, $f^{-1}(\alpha)$ es cubierta abierta para X.

(2) Sea $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\beta)$. Como $\alpha < \beta$, existe $A \in \alpha$ tal que $B \subset A$, entonces $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A)$. Por lo tanto, $f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\beta)$.

(3) Sea $f^{-1}(A \cap B) \in f^{-1}(\alpha \vee \beta)$. Como $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\alpha)$ y $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\beta)$. Se concluye que $f^{-1}(A \cap B) \in f^{-1}(\alpha) \vee f^{-1}(\beta)$.

Ahora, sea $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in f^{-1}(\alpha) \vee f^{-1}(\beta)$. Como $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$ y $f^{-1}(A \cap B) \in f^{-1}(\alpha \vee \beta)$, entonces $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in f^{-1}(\alpha \vee \beta)$. Por lo tanto, $f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}(\alpha) \vee f^{-1}(\beta)$.

□

Definición 55. *Dados $n \in \mathbb{N}$, $f : X \longrightarrow X$ una función, y A un subconjunto de X, denotamos por $f^{-n}(A)$ a la imagen inversa de A bajo la función f^n, es decir,*

$$f^{-n}(A) = (f^n)^{-1}(A) = \{x \in X : f^n(x) \in A\}$$

Definición 56. *Sean $f : X \longrightarrow X$ una función continua, α una cubierta abierta para X y $n \in \mathbb{N}$. Definamos*

$$f^{-n}(\alpha) = \{f^{-n}(A) : A \in \alpha\}.$$

Proposición 57. *Sean $f : X \longrightarrow X$ una función continua y α, β cubiertas abiertas para X, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:*

(1) $f^{-n}(\alpha \vee \beta) = f^{-n}(\alpha) \vee f^{-n}(\beta)$,

(2) *Si* $\alpha < \beta$, *entonces* $f^{-n}(\alpha) < f^{-n}(\beta)$.

Demostración. Procedamos por inducción.

(1) La base de inducción se sigue de la Proposición 54. Supongamos que $f^{-(n-1)}(\alpha \vee \beta) = f^{-(n-1)}(\alpha) \vee f^{-(n-1)}(\beta)$.
Ahora, lo mostraremos para n.

$$\begin{aligned} f^{-n}(\alpha \vee \beta) &= f^{-(n-1)}(f^{-1}(\alpha \vee \beta)) \\ &= f^{-(n-1)}(f^{-1}(\alpha)) \vee f^{-(n-1)}(f^{-1}(\beta)) \\ &= f^{-n}(\alpha) \vee f^{-n}(\beta). \end{aligned}$$

(2) La base de inducción se sigue de la Proposición 54. Supongamos que $f^{-(n-1)}(\alpha) < f^{-(n-1)}(\beta)$.
Ahora lo mostraremos para n. Sea $f^{-n}(B) \in f^{-n}(\beta) = f^{-(n-1)}(f^{-1}(\beta))$. Por hipótesis de inducción, existe $f^{-n}(A) \in f^{-(n-1)}(f^{-1}(\alpha))$ tal que $f^{-n}(B) \subset f^{-n}(A)$. Por lo tanto, $f^{-n}(\alpha) < f^{-n}(\beta)$.

□

Proposición 58. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una funcion continua y α una cubierta abierta para Y. Si β es una subcubierta de α, entonces $f^{-1}(\beta)$ es una subcubierta de $f^{-1}(\alpha)$.*

Demostración. Sea $x \in X$, entonces $f(x) \in f(X) \subset Y$. Al ser β subcubierta de Y, $f(x) \in B$ para algún $B \in \beta$, más aún $x \in f^{-1}(B)$. Por lo tanto $X \subset \bigcup f^{-1}(\beta)$.

Ahora, si $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\beta)$, entonces $B \in \beta$. Como β es una subcubierta de α, entonces $B \in \alpha$. Así, $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\alpha)$. $\square$

Proposición 59. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, y α una cubierta abierta para Y. Entonces $N(f^{-1}(\alpha)) \leq N(\alpha)$. Si además f es suprayectiva, entonces $N(f^{-1}(\alpha)) = N(\alpha)$.*

Demostración. Sea γ una subcubierta abierta de α, tal que $\mid \gamma \mid = N(\alpha)$. Entonces, $Y \subset \bigcup\limits_{A\in\gamma} A$.

Afirmación: $X \subset \bigcup\limits_{A\in\gamma} f^{-1}(A)$.

En efecto, si $x \in X$, entonces $f(x) \in Y \subset \bigcup\limits_{A\in\gamma} A$, de donde $f(x) \in A$ para algún $A \in \gamma$, esto implica que $x \in f^{-1}(A)$. Así, $x \in \bigcup\limits_{A\in\gamma} f^{-1}(A)$. Por lo tanto, $X \subset \bigcup\limits_{A\in\gamma} f^{-1}(A)$.

Por la Proposición 58, $\mid f^{-1}(\gamma) \mid = N(\alpha)$, por lo que $N(f^{-1}(\alpha)) \leq N(\alpha)$.

Supongamos que f es suprayectiva.

Sea η una subcubierta de $f^{-1}(\alpha)$, tal que $\mid \eta \mid = N(f^{-1}(\alpha))$. Entonces, dado que f es suprayectiva, $f(X) = Y = \bigcup\limits_{A\in\eta} A$. Así, $N(\alpha) \leq N(f^{-1}(\alpha))$. Por lo tanto, $N(f^{-1}(\alpha)) = N(\alpha)$. $\square$

Lema 60. *Sean $f : X \longrightarrow X$ una función continua, α y β dos cubiertas abiertas para X y $A \subset X$. Entonces, para toda pareja de números naturales n y m se tiene lo siguiente:*

(1) $f^{-n}(f^{-m}(A)) = f^{-(n+m)}(A)$,

(2) $(f^m)^{-n}(A) = f^{-mn}(A)$.

Demostración. (1) Sea $x \in f^{-n}(f^{-m}(A))$, entonces $f^n(x) \in f^{-m}(A)$, esto implica que $f^m(f^n(x)) \in A$, es decir $f^{n+m}(x) \in A$. Así, $x \in f^{-(n+m)}(A)$. Ahora, si $x \in f^{-(n+m)}(A)$, entonces $f^{n+m}(x) \in A$, es decir $f^m(f^n(x)) \in A$, por lo que $f^n(x) \in f^{-m}(A)$. Luego, $x \in f^{-n}(f^{-m}(A))$. Por lo tanto, $f^{-n}(f^{-m}(A)) = f^{-(n+m)}(A)$.

(2) Sea $x \in (f^m)^{-n}(A)$, entonces $(f^m)^n(x) \in A$, es decir $f^{mn}(x) \in A$. Por tanto, $x \in f^{-mn}(A)$.
Por otro lado, si $x \in f^{-mn}(A)$, entonces $f^{mn}(x) \in A$, es decir $(f^m)^n(x) \in A$. Así, $x \in (f^m)^{-n}(A)$. Por lo tanto, $(f^m)^{-n}(A) = f^{-mn}(A)$.

□

Capítulo 2

Entropía

2.1. Definición de entropía

Definición 61. *Sean $f : X \longrightarrow X$ una funcion continua, α una cubierta abierta para X y $n, k, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $0 \leq j \leq k \leq n-1$. Definamos la cubierta abierta*

$$\Lambda_{j,k} = \vee_{i=j}^{k} f^{-i}(\alpha) = f^{-j}(\alpha) \vee f^{-(j+1)}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(k)}(\alpha)$$

donde $f^{-0}(\alpha) = \alpha$.

A partir de la pareja: $f : X \longrightarrow X$ y α, obtenemos una sucesión de cubiertas,

$$\alpha, \alpha \vee f^{-1}(\alpha), \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha), ..., \vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha), ...$$

Proposición 62. *Sean $f : X \longrightarrow X$ una función continua, α una cubierta abierta para X y $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Entonces, $\Lambda_{0,n-2} < \Lambda_{0,n-1}$,* *Demostración.* Sean $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A) \in \Lambda_{0,n-1}$ y $\bigcap_{i=0}^{n-2} f^{-i}(A) \in \Lambda_{0,n-2}$.

Afirmación: $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A) \subset \bigcap_{i=0}^{n-2} f^{-i}(A)$.

En efecto, si $x \in \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A)$, entonces $x \in f^{-i}(A)$ para cada $0 \leq i \leq n-1$, en particular, para cada $0 \leq i \leq n-2$, es decir $x \in \bigcap_{i=0}^{n-2} f^{-i}(A)$. Por lo tanto, $\Lambda_{0,n-2} < \Lambda_{0,n-1}$. □

La siguiente proposición se sigue de (1) de la Proposición 50.

Proposición 63. $N(\Lambda_{0,n-2}) \leq N(\Lambda_{0,n-1})$.

Notemos que, una vez que fijemos la pareja f y α el valor de $N(\Lambda_{0,n-1})$ solo depende de n.

La idea central es descubrir que tan simple o complicado es el sistema dinámico generado por $f : X \longrightarrow X$ a través del estudio de la rapidez de crecimiento de esta sucesión:

$$\{N(\Lambda_{0,n-1})\}_{n=1}^{\infty}$$

cuando n tiende a infinito.

Intuitivamente una función sencilla $f : X \longrightarrow X$, que mueve muy poco a los puntos de X, estaría relacionada con un crecimiento lento o polinomial (con respecto a n) del valor $N(\Lambda_{0,n-1})$. Una función con dinámica más complicada movería tanto los puntos de X que el crecimiento sería exponencial.

Para descubrir esta diferencia, entre crecimiento polinomial y crecimiento exponencial, calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(N(\Lambda_{0,n-1})\right)$$

Proposición 64. *Sean $f : X \to X$ una función continua, α una cubierta abierta para X y $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\log\left(N(\Lambda_{0,(n+m)-1})\right) \leq \log\left(N(\Lambda_{0,n-1})\right) + \log\left(N(\Lambda_{0,m-1})\right)$$

Demostración. Sean α una cubierta abierta para X, y $n, m \in \mathbb{N}$.
$\log\left(N\left[\Lambda_{0,(n+m)-1}\right]\right)$

$$\begin{aligned} &= \log\left(N\left[\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-((n+m)-1)}(\alpha)\right]\right) \\ &= \log\left(N\left[\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha) \vee f^{-n}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-((n+m)-1)}(\alpha)\right]\right) \\ &= \log\left(N\left[\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha) \vee f^{-n}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-n-(m-1))}(\alpha)\right]\right), \end{aligned}$$

por el Lema 60,

$$= \log\left(N\left[\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha) \vee f^{-n}\left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m-1)}(\alpha)\right)\right]\right),$$

dado que la función logaritmo es creciente, por la Proposición 52,

$$\begin{aligned} &\leq \log\left(N\left[\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha)\right] N\left[f^{-n}\left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m-1)}(\alpha)\right)\right]\right) \\ &= \log\left(N\left[\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha)\right]\right) \\ &\quad + \log\left(N\left[f^{-n}(\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m-1)}(\alpha)\right]\right). \end{aligned}$$

Ahora, por la Proposición 59, tenemos que esta última suma es menor o igual a

$$\begin{aligned} &\log\left(N\left[\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha)\right]\right) + \log\left(N\left[\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m-1)}(\alpha)\right]\right) \\ = \; &\log\left(N(\Lambda_{0,n-1})\right) + \log\left(N(\Lambda_{0,m-1})\right). \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 65. *Sean $f : X \longrightarrow X$ una función continua, α una cubierta abierta para X y $n \in \mathbb{N}$. Definamos $a_n = \log\left(N(\Lambda_{0,n-1})\right)$. Entonces,*

(1) $a_n \leq a_{n+1}$,

(2) $a_n \leq na_1$,

(3) *El* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\log\left[N\left(\Lambda_{0,n-1}\right)\right]\right)$ *siempre es finito.*

Demostración. (1) Sabemos que $\Lambda_{0,n-1} < \Lambda_{0,n}$. Por la Proposición 50, $N\left(\Lambda_{0,n-1}\right) \leq N\left(\Lambda_{0,n}\right)$. Además, por ser creciente la función logaritmo, tenemos que $\log\left[N\left(\Lambda_{0,n-1}\right)\right] \leq \log\left[N\left(\Lambda_{0,n}\right)\right]$. Por lo tanto, $a_n \leq a_{n+1}$.

(2) Primero mostraremos que $N\left(\Lambda_{0,n-1}\right) \leq \left(N(\alpha)\right)^n$.

En efecto, procedamos por inducción sobre n, notemos que

$$N(\Lambda_{0,0}) = N(\alpha) \leq N(\alpha) = N(\alpha)^1.$$

Ahora, supongamos que $N\left(\Lambda_{0,(n-1)-1}\right) \leq \left(N(\alpha)\right)^{n-1}$. Sabemos que $N(f^{-(n-1)}(\alpha)) \leq N(\alpha)$, utilizando la hipótesis de inducción y la desigualdad anterior, se tiene que

$$N(\Lambda_{0,(n-1)-1})N(f^{-(n-1)}(\alpha)) \leq \left(N(\alpha)\right)^{n-1} N(\alpha).$$

Así, $N(\Lambda_{0,n-1}) \leq \left(N(\alpha)\right)^n$.

Ya que la función logaritmo es creciente,

$$\log\left[N(\Lambda_{0,n-1})\right] \leq \log\left[\left(N(\alpha)\right)^n\right].$$

Así, $a_n \leq n\log\left[N(\alpha)\right] = na_1$.

(3) Sea β una subcubierta de $\Lambda_{0,n-1}$ tal que $\mid \beta \mid = N\left(\Lambda_{0,n-1}\right)$. Cabe aclarar que $\mid \beta \mid$ es un número finito y fijo, luego

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\log N\left(\Lambda_{0,n-1}\right)\right] &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log\mid\beta\mid\right)\\
&= \log\mid\beta\mid \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\log N\left(\Lambda_{0,n-1}\right)\right]$ es finito.

□

Definición 66. *Sea* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* $\mathbb{R}$ *definimos los límites superior e inferior de la sucesión* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *a los cuales denotados como* $\limsup(a_n)$ *y* $\liminf(a_n)$ *respectivamente, como sigue:*

- *Si* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *no está acotada superiormente, entonces*

$$lim\sup(a_n) = \infty.$$

- *Si* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *no está acotada inferiormente, entonces*

$$lim\inf(a_n) = -\infty.$$

- *Si* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *está acotada, entonces*

$$\limsup(a_n) = \max\left\{y\in\mathbb{R}: \quad \textit{existe} \quad \{n_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}, \lim_{i\to\infty} a_{n_i} = y\right\}$$

y

$$\liminf(a_n) = \min\left\{y\in\mathbb{R}: \quad \textit{existe} \quad \{n_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}, \lim_{i\to\infty} a_{n_i} = y\right\}.$$

Proposición 67. *Sean* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *un sucesión en* $\mathbb{R}$ *y* $a_0\in\mathbb{R}$. *Entonces,*

(1) $\liminf(a_n) \leq \limsup(a_n)$,

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$ *si y sólo si* $\limsup(a_n) = \liminf(a_n) = a_0$.

Demostración. (1)

- Cuando $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no esá acotada superiormente tenemos que
$$\limsup(a_n) = \infty$$
y sabemos que $\liminf(a_n) \leq \infty$. Por lo tanto,
$$\liminf(a_n) \leq \limsup(a_n).$$

- Cuando $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada inferiormente implica que
$$\liminf(a_n) = -\infty$$
y sabemos que $-\infty \leq \limsup(a_n)$. Por lo tanto,
$$\liminf(a_n) \leq \limsup(a_n).$$

- Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada,
$$\limsup(a_n) = \max\left\{y \in \mathbb{R} : \quad \text{existe} \quad \{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}, \lim_{i\to\infty} a_{n_i} = y\right\}$$
y
$$\liminf(a_n) = \min\left\{y \in \mathbb{R} : \quad \text{existe} \quad \{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}, \lim_{i\to\infty} a_{n_i} = y\right\}.$$
Sabemos que para todo $A \subset \mathbb{R}$, $\min(A) \leq \max(A)$. Por lo tanto $\liminf(a_n) \leq \limsup(a_n)$.

(2) Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$, entonces tenemos lo siguiente:

(I) Dado $b > a_0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $m \geq k_0$, $a_m < b$.

(II) Dado $c < a_0$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $m \geq k_1$, $a_m > c$.

De (I) y (II) se tiene que

$$\operatorname{lím\,sup}(a_n) \leq a_0 \leq \operatorname{lím\,ínf}(a_n).$$

Usando el primer inciso de esta proposición concluimos que

$$\operatorname{lím\,sup}(a_n) = \operatorname{lím\,ínf}(a_n) = a_0.$$

Ahora, supongamos que $\operatorname{lím\,sup}(a_n) = \operatorname{lím\,ínf}(a_n) = a_0$. De aquí que $a_0 \leq \operatorname{lím\,ínf}(a_n)$ y $\operatorname{lím\,sup}(a_n) \leq a_0$, esto implica que dados $b > a_0$ y $c < a_0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $m \geq k$, $c < a_m < b$. Por lo tanto, $\operatorname{lím}_{n\to\infty} a_n = a_0$.

$\square$

Proposición 68. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ que cumple lo siguiente:*

(1) $0 \leq a_n$,

(2) $a_{n+m} \leq a_n + a_m$.

Entonces $\displaystyle\operatorname{lím}_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ existe. Además, $\displaystyle\operatorname{lím}_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \operatorname{ínf}\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Demostración. Consideremos a m un número fijo. Para cada $n > m$, por el algoritmo de la división podemos escribir $n = qm + r$ donde $1 \leq q$ y $0 \leq r < m$, entonces

$$\begin{aligned} a_n &= a_{qm+r} \\ &\leq a_{qm} + a_r. \end{aligned}$$

Afirmación: $a_{qm} \leq qa_m$, para todo $q \in \mathbb{N}$.

En efecto, procedemos por inducción sobre q. Dado que $a_m \leq a_m$, entonces la afirmación se cumple para $q = 1$. Supongamos que $a_{(q-1)m} \leq (q-1)a_m$ para alguna $q \in \mathbb{N}$. Entonces $a_{(q-1)m} + a_m \leq (q-1)a_m + a_m$. Por (2), esto implica que

$$a_{(q-1)m+m} \leq [(q-1)+1]a_m.$$

Así, $a_{qm} \leq qa_m$. Con lo que concluimos la prueba de la afirmación.

Por la afirmación anteriór tenemos que $a_n \leq a_{qm} + a_r \leq qa_m + a_r$. Notemos que para todo $n > m$, $\dfrac{a_n}{n} \leq \dfrac{qa_m}{n} + \dfrac{a_r}{n}$.

Como $n = qm + r$, se tiene que $\frac{q}{n} = \frac{n-r}{nm}$, con esto

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{q}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n-r}{nm} \\
&= \frac{1}{m}\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{r}{n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{m}\left(1 - \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n}\right) \\
&= \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q}{n}a_m + \frac{a_r}{n}\right) &= a_m \lim_{n\to\infty} \frac{q}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{a_r}{n} \\
&= \frac{a_m}{m}.
\end{aligned}$$

Ya que a_r solo toma una cantidad finita de valores: $a_1, a_2, ..., a_{m-1}$. Por lo que para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\limsup\left(\frac{a_n}{n}\right) \leq \limsup\left(\frac{qa_m}{n} + \frac{a_r}{n}\right) = \frac{a_m}{m}.$$

De aquí se sigue que

$$\limsup\left(\frac{a_n}{n}\right) \leq c = \inf\left\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Por otro lado, como para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $c \leq \dfrac{a_n}{n}$ entonces $c \leq \liminf \left(\dfrac{a_n}{n}\right)$. Pero sabemos por (1) de la Proposición 67 que

$$\liminf \left(\frac{a_n}{n}\right) \leq \limsup \left(\frac{a_n}{n}\right).$$

Así,

$$\liminf \left(\frac{a_n}{n}\right) = \limsup \left(\frac{a_n}{n}\right) = \inf \left\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Por (2) de la Proposición 67 concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf \left\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

□

La demostración de la siguiente proposición, es inmediata a partir de las proposiciones 64 y 68.

Proposición 69. *Sean $f : X \longrightarrow X$ una función continua, α una cubierta abierta para X y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log[N(\Lambda_{0,n-1})]$$

existe. Además,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log[N(\Lambda_{0,n-1})] \leq \log[N(\alpha)].$$

A continuación definimos la entropía de un sistema dinámico discreto.

Definición 70. *Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \longrightarrow X$ una función continua, α una cubierta abierta para X y $n \in \mathbb{N}$.*
La entropía de f con respecto a la cubierta α *es:*

$$ent(f,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log[N(\Lambda_{0,n-1})].$$

La entropía topológica de f *está dada por:*

$$ent(f) = \sup\{ent(f,\alpha) : \alpha \textit{ es una cubierta abierta de } X\}.$$

A la entropía topológica de f solo le llamaremos la *entropía de f.*
Si $ent(f) \neq 0$, entonces diremos que la entropía de f es positiva.

Proposición 71. *Si $ent(f) > 0$, entonces existe almenos una cubierta abierta de X, digamos α, tal que $ent(f,\alpha) > 0$.*

Demostración. Sea $E = ent(f) > 0$.
Afirmación: Para toda $0 < \delta < E$ existe α una cubierta abiertapara X tal que $0 < \delta < ent(f,\alpha) < E$.
En efecto, sea $0 < \delta < E$ supongamos que para toda cubierta abierta α, $ent(f,\alpha) < \delta$, entonces para todo x tal que $\delta < x < E$ se tiene que x es cota superior de $\{ent(f,\alpha) : \alpha$ es cubierta abierta para $X\}$, esto contradice que E sea la mínima cota superior de este conjunto. Así existe al menos una α tal que $0 < \delta < ent(f,\alpha) < E$. $\square$

Ejemplo 72.

Sean $I : X \longrightarrow X$ la función identidad en X, α una cubierta abierta para X y $n \in \mathbb{N}$.
Notemos que para cada $n \geq 2$, $\vee_{i=0}^{n-1} I^{-i}(\alpha) = \alpha \vee I^{-1}(\alpha)$.
Por lo que,

$$\begin{aligned} ent(f,\alpha) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left[N\left(\vee_{i=0}^{n-1} I^{-i}(\alpha)\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left[N\left(\alpha \vee I^{-1}(\alpha)\right)\right]. \end{aligned}$$

Sea β una subcubierta de $\alpha \vee I^{-1}(\alpha)$, tal que $N\left(\alpha \vee I^{-1}(\alpha)\right) = \mid \beta \mid$, entonces

$$\begin{aligned} ent(f, \alpha) &= \lim_{n \to \infty} \frac{\log(\mid \beta \mid)}{n} \\ &= \log(\mid \beta \mid) \left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} ent(f) &= \sup\{ent(f, \alpha) : \alpha \text{ es una cubierta abierta para } X\} \\ &= \sup\{0\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2.2. Propiedades de la entropía

Observación 3. *Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \longrightarrow X$ una función continua, α una cubierta abierta para X y $k \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\left\{ \frac{1}{nk} \log \left[N\left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-nk+1}(\alpha) \right) \right] \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es una subsucesión de

$$\left\{ \frac{1}{n} \log \left[N\left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha) \right) \right] \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Observación 4. *Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \longrightarrow X$ una función continua, α una cubierta abierta para X y $k \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\vee_{i=0}^{n-1} \left(f^k\right)^{-i}(\alpha) < \vee_{i=0}^{nk-1} f^{-i}(\alpha).$$

Proposición 73. *Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \longrightarrow X$ una función continua y $k \in \mathbb{N}$. Entonces la entropía de f^k es k veces la entropía de f.*

Demostración. Sea α una cubierta abierta para X, definamos a β como

$$\beta = \Lambda_{0,k-1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} ent(f^k,\beta) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[N\left(\vee_{i=0}^{n-1}(f^k)^{-i}(\beta)\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[N\left(\beta\vee f^{-k}(\beta)\vee\cdots\vee f^{-nk+k}(\beta)\right)\right] \end{aligned}$$

sustituyendo β se tiene que,

$$\begin{aligned} & ent(f^k,\beta) \\ = & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left[N\left(\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-k+1}(\alpha)\vee f^{-k}(\alpha)\vee\right.\right. \\ & \left.\left.\cdots\vee f^{-nk+1}(\alpha)\right)\right] \\ = & \lim_{n\to\infty}\frac{k}{nk}\log\left[N\left(\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-nk+1}(\alpha)\right)\right] \\ = & k[ent(f,\alpha)]. \end{aligned}$$

Esta última igualdad se da por la Observación 3.

Por otro lado,

$$ent(f^k)\geq ent(f^k,\beta)=k[ent(f,\alpha)]$$

para toda cubierta α para X.

Por lo tanto, si $ent(f)=\infty$, entonces $ent(f^k)=\infty$, y si $ent(f)$ es finita, entonces

$$ent(f^k)\geq k[ent(f)].$$

De la Observación 4 se sigue que

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nk}\log\left[N\left(\alpha\vee\left(f^k\right)^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee\left(f^k\right)^{-n+1}(\alpha)\right)\right] \\ \leq & \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nk}\log\left[N\left(\alpha\vee f^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee f^{-nk+1}(\alpha)\right)\right]. \end{aligned}$$

Y así,

$$\frac{1}{k}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left[N\left(\alpha\vee(f)^{-1}(\alpha)\vee\cdots\vee(f)^{-n+1}(\alpha)\right)\right]\leq ent(f,\alpha).$$

Por lo tanto, para cada cubierta abierta α se tiene que

$$\frac{1}{k}\left[ent\left(f^k,\alpha\right)\right]\leq ent(f,\alpha)\leq ent(f).$$

De aquí se sigue que,

$$ent(f^k)\leq k[ent(f)].$$

Por lo tanto,

$$ent(f^k)=k[ent(f)].$$

$\square$

Ejemplo 74. *Consideremos la circunferencia de radio* 1,

$$\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C}:\mid z\mid=1\},$$

y $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, *tal que* $0\leq\frac{p}{q}\leq 1$. *La rotación del ángulo* $\frac{p}{q}$ *es la función* $f:\mathbb{S}^1\longrightarrow\mathbb{C}$ *dada por la regla de correspondencia,*

$$f(z)=z\exp\left(\frac{p}{q}2\pi i\right).$$

Para toda $z\in\mathbb{S}^1$ *se tiene que,*

$$\begin{aligned}
f^q(z) &= z\exp\left(q\left[\frac{p}{q}2\pi i\right]\right)\\
&= z\exp\left(p2\pi i\right)\\
&= z\left(\cos(2\pi p)+i\sin(2\pi p)\right)\\
&= z(1+i0)\\
&= z.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f^q es la función identidad. Por el Ejemplo 72 se tiene que $ent(f^q) = 0$, y por la Proposición 73, q veces la entropía de f es igual a 0. Por lo tanto,

$$ent(f) = 0.$$

Proposición 75. *Si la cardinalidad del espacio X es finita, entonces para toda función $f : X \longrightarrow X$ se tiene que $ent(f) = 0$.*

Además, si el espacio X tiene cardinalidad infinita pero numerable se tiene la misma conclusión como se muestra en la siguiente proposición, la cual se puede consultar en [2].

Proposición 76. *Si la cardinalidad del espacio X es infinita numerable, entonces para toda función $f : X \longrightarrow X$ se tiene que $ent(f) = 0$.*

Proposición 77. *Sean $f : X \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y$ dos funciones continuas definidas en espacios métricos compactos y $h : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si $h \circ f = g \circ h$, entonces $ent(f) \geq ent(g)$.*

Demostración. Sea α una cubierta abierta para Y. Entonces

$$ent(g, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(N\left[\vee_{i=0}^{n-1} g^{-i}(\alpha)\right]\right).$$

Al ser h una función suprayectiva y usando la Proposición 59 y el Lema 60, se tiene que

$$\begin{aligned} ent(g, \alpha) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(N\left[h^{-1}\left(\vee_{i=0}^{n-1} g^{-i}(\alpha)\right)\right]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(N\left[\vee_{i=0}^{n-1} h^{-1}\left(g^{-i}(\alpha)\right)\right]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(N\left[\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\left(h^{-1}(\alpha)\right)\right]\right) \\ &= ent(f, h^{-1}(\alpha)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $ent(f) \geq ent(g)$. $\square$

Definición 78. *Sean X e Y espacios topológicos, y $h : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces, h es un* homeomorfismo *si:*

(1) *h es una función biyectiva,*

(2) *h es continua,*

(3) *La inversa de h es continua.*

Teorema 79. *Sean $f : X \longrightarrow X$, $g : Y \longrightarrow Y$ dos funciones continuas definidas en espacios métricos compactos. Si f y g son topológicamente equivalentes a través del homeomorfismo $h : X \longrightarrow Y$, entonces*

$$ent(f) = ent(g).$$

Demostración. Como f y g son conjugadas a través del homeomorfismo h, se tiene que f y g son conjugadas a través del homeomorfismo h^{-1}. De la Proposición 77 se sigue que $ent(f) \geq ent(g)$ y $ent(f) \leq ent(g)$. Por lo tanto, ambas funciones tienen la misma entropía. $\square$

2.3. La entropía de la función Tienda

Lema 80. *Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \longrightarrow X$ una función continua, y $k \in \mathbb{N}$. Si existen k subconjuntos cerrados de X, no vacíos, ajenos dos a dos, $A_1, A_2, ..., A_k$, tales que*

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_k \subset \bigcap_{i=1}^{k} f(A_k),$$

entonces $ent(f) \geq \log(k)$.

Demostración. Sean $O = X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)$ y $O_1, O_2, ..., O_k$, k subconjuntos abiertos de X, ajenos dos a dos, tales que $A_i \subset O_i$ para todo $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Entonces, la colección $\alpha = \{O\} \cup \{O_1, O_2, ..., O_k\}$ es una cubierta abierta para X.

Sea $n \in \mathbb{N}$. El conjunto

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \{1, 2, ..., k\}\}$$

tiene cardinalidad k^n.

Para cada $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Gamma$ consideremos el conjunto

$$E_x = \{p \in X : f^{j-1}(p) \in A_{x_j} \text{ para todo } j \in \{1, 2, ..., n\}\}.$$

Afirmación 1: E_x es un conjunto no vacío.

Suponer que $E_x = \emptyset$. Implica que no existe $p \in X$ tal que $f^{j-1}(p) \in A_{x_j}$ para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Esto es equivalente a decir que, para todo $p \in X$, $f^{j-1}(p)$ no pertenese a A_{x_j} para cualquier j, esto contradice el hecho de que $A_1, A_2, ..., A_k$ son subconjuntos no vacíos. Por lo tanto, E_x es no vacío.

Afirmación 2: Cada elemento de E_x está contenido en un único elemento de la cubierta $\Lambda_{0,n-1}$, a saber

$$\bigcap_{j=1}^{n} f^{-(j-1)}(O_{x_j}).$$

En efecto, sea $p \in E_x$, entonces $f^{j-1}(p) \in A_{x_j} \subset O_{x_j}$ para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, esto implica que $p \in f^{-(j-1)}(O_{x_j})$ para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, es decir,

$$p \in \bigcap_{j=1}^{n} f^{-(j-1)}(O_{x_j}).$$

Ahora, supongamos que existe $\bigcap_{j=1}^{n} f^{-(j-1)}(O_{x'_j}) \in \Lambda_{0,n-1}$, tal que

$$p \in \bigcap_{j=1}^{n} f^{-(j-1)}(O_{x'_j}).$$

Entonces, p pertenece a $f^{-(j-1)}(O_{x_j})$ y a $f^{-(j-1)}(O_{x'_j})$ para todo j, es decir $f^{j-1}(p) \in O_{x_j} \cap O_{x'_j}$ lo que contradice el hecho de que O_{x_j} y $O_{x'_j}$ son ajenos. Así se concluye la prueba de la Afirmación 2.

De la afirmación anterior, concluimos que $N(\Lambda_{0,n-1}) \geq k^n$. Así,

$$\begin{aligned} ent(f,\alpha) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log[N(\Lambda_{0,n-1})] \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(k^n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \log(k) \\ &= \log(k). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $ent(f) \geq \log(k)$. □

Proposición 81. *La función Tienda tiene entropía positiva.*

Demostración. Comenzamos con una afirmación.

Afirmación: La función T^2 tansforma los intervalos $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ en el intervalo $[0,1]$.

En efecto, sea $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, entonces $0 \leq T(x) \leq \frac{1}{2}$, esto implica que

$$0 = T(0) \leq T\left(T(x)\right) \leq T\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Como T es continua obtenemos que, $0 \leq T^2(x) \leq 1$.

Ahora, sea $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. Como la función Tienda es decreciente en el intervalo

$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, se tiene que

$$\frac{1}{2} = T\left(\frac{3}{4}\right) \leq T(x) \leq T\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

esto implica que

$$0 = T(1) \leq T^2(x) \leq T\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Por lo tanto, T^2 también tansforma al intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ en el intervalo $[0, 1]$.
De la afirmación se sigue que

$$\left(\left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]\right) \subset [0, 1] = \left(T^2\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right) \cap T^2\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]\right)\right).$$

Por el Lema 80 y la Proposición 73 se concluye que

$$2[ent(T)] = ent(T^2) \geq \log(2).$$

Por lo tanto, $ent(T) \geq \frac{\log(2)}{2} > 0$. $\square$

Proposición 82. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $\ell \in \{0, 1, 2, ..., 2^n - 1\}$ se tiene lo siguiente:*

(1) *La funcion T^n restringida al intervalo $\left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right]$,*

$$T^n \mid_{\left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right]} : \left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right] \longrightarrow [0, 1],$$

es un homeomorfismo.

(2) *La regla de correspondencia de T^n en $\left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right]$ es*

$$T^n(x) = \mu + (-1)^\ell 2^n x,$$

donde $\mu \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, en cada intervalo $\left[\frac{\ell}{2^n}, \frac{\ell+1}{2^n}\right]$ la gáfica de T^n es un segmento de recta cuya pendiente es 2^n, si ℓ es par, y es $-(2^n)$, si ℓ es impar.

Demostración. Nuestro argumento utiliza inducción matemática.

Veamos que la afirmación es cierta para $n = 1$. En este caso, $\ell \in \{0, 1\}$.

Si $\ell = 0$, es inmediato que $T : \left[0, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow [0, 1]$ es homeomorfismo ya que en este intervalo,

$$T(x) = 2x = 0 + (-1)^0 2x.$$

Si $\ell = 1$, entonces $T : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \longrightarrow [0, 1]$ es también un homeomorfismo ya que en este conjunto,

$$T(x) = 2 - 2x = 2 + (-1)^1 2x.$$

Supongamos válida la afirmación para $n = k$. Es decir, para cada ℓ en el conjunto $\{0, 1, 2, ..., 2^k - 1\}$,

$$T^k \mid_{\left[\frac{\ell}{2^k}, \frac{\ell+1}{2^k}\right]} : \left[\frac{\ell}{2^k}, \frac{\ell + 1}{2^k}\right] \longrightarrow [0, 1]$$

es un homeomorfismo. Además, en el intervalo $\left[\frac{\ell}{2^k}, \frac{\ell + 1}{2^k}\right]$ la regla de correspondencia de T^k es:

$$T^k(x) = \mu + (-1)^\ell 2^k x, \text{ con } \mu \in \mathbb{Z}.$$

Sea $n = k + 1$, y $\ell \in \{0, 1, 2, ..., 2^{k+1} - 1\}$. Observemos que si $\ell \leq 2^k - 1$, entonces

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell + 1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

y si $2^k \leq \ell \leq 2^{k+1} - 1$, entonces

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell + 1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Caso 1. Si $\ell \leq 2^k - 1$, entonces $\frac{\ell + 1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2}$, con ello la función T^{k+1} se puede expresar mediante la composición siguiente:

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell + 1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{\ell}{2^k}, \frac{\ell + 1}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0, 1].$$

Ambas funciones son homeomorfismos. La segunda de ellas T^k, lo es por hipótesis de inducción. Por tanto

$$T^{k+1}\mid_{\left[\frac{\ell}{2^{k+1}},\frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right]}\colon \left[\frac{\ell}{2^{k+1}},\frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \longrightarrow [0,1]$$

es un homeomorfismo.

Además,

$$\begin{aligned} T^{k+1}(x) &= T^k(T(x)) \\ &= T^k(2x) \\ &= \mu + (-1)^{\ell} 2^k (2x) \\ &= \mu + (-1)^{\ell} 2^{k+1} x. \end{aligned}$$

Caso 2. Si $2^k \leq \ell \leq 2^{k+1} - 1$, entonces $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\ell}{2^{k+1}}$ y $\dfrac{\ell+1}{2^{k+1}} \leq 1$, esto implica que la función T^{k+1} se puede expresar mediante la composición siguiente:

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}},\frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{2^{k+1}-\ell-1}{2^k},\frac{2^{k+1}-\ell}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0,1].$$

Es inmediato que la primera función es un homeomorfismo.

Como $2^k \leq \ell \leq 2^{k+1} - 1$, entonces

$$\begin{aligned} -2^k &\geq -\ell \geq 1 - 2^{k+1}, \\ 2^{k+1} - 2^k - 1 &\geq 2^{k+1} - \ell - 1 \geq 0, \\ 2^k - 1 &\geq 2^{k+1} - \ell - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Así la segunda función, gracias a la hipótesis de inducción, también es un homeomorfismo.

En este caso, si $x \in \left[\frac{\ell}{2^{k+1}}, \frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right]$, entonces

$$\begin{aligned} T^{k+1}(x) &= T^k(T(x)) \\ &= T^k(2-2x) \\ &= \mu + (-1)^{2^{k+1}-\ell-1} 2^k (2-2x) \\ &= \mu + (-1)^{2^{k+1}-\ell-1} 2^{k+1} + (-1)^{2^{k+1}-\ell} 2^{k+1} x. \end{aligned}$$

Sea $\mu' = \mu + (-1)^{2^{k+1}-\ell-1} 2^{k+1}$. Como ℓ y $2^{k+1} - \ell$ tienen la misma paridad, entonces

$$T^{k+1}(x) = \mu' + (-1)^{\ell} 2^{k+1}(x),$$

con $\mu' \in \mathbb{Z}$. $\square$

Corollary 83. *Sea (a, b) un intervalo abierto tal que $(a, b) \subset [0, 1]$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(a, b) = [0, 1]$.*

Demostración. Como $a < b$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Se sigue que existe un valor ℓ en el conjunto $\{0, 1, 2, ..., 2^N - 1\}$ tal que

$$\left[\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N}\right] \subset (a, b)$$

Ahora, gracias a la Proposición 82, tenemos que $T^N((a, b)) = [0, 1]$. $\square$

Proposición 84. *La entropía de la función tienda es mayor o igual a* $\log(2)$.

Demostración. La Proposición 82 nos dice que es posible encontrar 2^{n-1} intervalos cerrados, ajenos dos a dos, tales que T^n transforma a cada uno de ellos en el intervalo $[0, 1]$. Usando la Proposición 73 y el Lema 80 tenemos que:

$$\begin{aligned} n[ent(T)] &= ent(T^n) \\ &\geq \log(2^{n-1}) \\ &= (n-1)\log(2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $ent(T) \geq log(2)$. $\square$

Capítulo 3

Entropía positiva

Como vimos al final del capítulo anterior la función tienda tiene entropía positiva, véase la Proposición 81, más aún, por la Proposición 84 la entropía de la función tienda es mayor o igual a $\log(2)$. En este capítulo estudiamos funciones con entropia positiva en particular veremos que la entropía postitiva tiene una fuerte relación con las funciones caóticas. Comenzamos analizando la función logística.

Definición 85. *Sea $L : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la función definida por la regla de correspondencia: $L(x) = 4x(1-x)$. A esta función se le conoce como la función* Logística.

Proposición 86. *Las funciones T y L son conjugadas utilizando el homeomorfismo $h : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definido como, $h(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.*

Demostración. Sea x un elemento del intervalo $[0,1]$.

$$\begin{aligned} L\circ h(x) &= L\left(\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\\ &= 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(1-\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\\ &= 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\\ &= \left[2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]^2\\ &= \sin^2(\pi x). \end{aligned}$$

Por otro lado, calculemos $h\circ T(x)$.

Caso 1. Sea $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Entonces

$$\begin{aligned} h\circ T(x) &= h(2x)\\ &= \sin^2\left(\frac{\pi(2x)}{2}\right)\\ &= \sin^2(\pi x). \end{aligned}$$

Caso 2. Sea $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. Entonces

$$\begin{aligned} h\circ T(x) &= h(2-2x)\\ &= \sin^2\left(\frac{\pi(2-2x)}{2}\right)\\ &= \sin^2(\pi-\pi x)\\ &= \sin^2(\pi x). \end{aligned}$$

De las igualdades anteriores concluimos que $L\circ h(x)=h\circ T(x)$. Por lo tanto, T y L son conjugadas usando el homeomorfismo h. □

Proposición 87. *La entropía de la función Logística es positiva.*

Demostración. Por la Proposición 86, T y L son topológicamente equivalentes. Y por el Teorema 79 se concluye que $ent(L)=ent(T)>0$. □

Ahora veamos que si una función continua, definida en un intervalo compacto, tiene un punto periódico de periodo m el cual no es una potencia de 2 entonces tiene entroía positiva. Comenzamos con el caso en que tiene un punto periódico de periodo 3.

Proposición 88. *Sea A un intervalo compacto y $f : A \longrightarrow A$ una función continua en A. Si f tiene un punto periódico de periodo* 3*, entonces la entropía de f es positiva.*

Demostración. Sean $x_0 \in A$ un punto periódico de f de periodo 3 y $a = \min o(x_0, f)$. El punto a es también de periodo 3 y su órbita se comporta de una de las siguientes dos formas:

- $a < f(a) < f^2(a)$.
- $a < f^2(a) < f(a)$.

Hagamos $b = f(a)$ y $c = f^2(a)$, consideremos sólo el primer caso ya que la demostración para el segundo es análoga.
Como $[a, c] \subset f([b, c])$, existe $[b_1, c_1] \subset [b, c]$ tal que

$$f([b_1, c_1]) = [a, c].$$

También, como $[b_1, c_1] \subset f([b, c])$, existe $[b_2, c_2] \subset [b, c]$ tal que

$$f([b_2, c_2]) = [b_1, c_1].$$

Notemos que a no pertenece a $[b_1, c_1]$. Por lo que c no está en $[b_2, c_2]$.
Debido a que

$$[a, c] \subset f([b, c]) \text{ y } [b, c] \subset f([a, b]),$$

entonces

$$[b_2, c_2] \subset f([b, c]) \text{ y } [b_2, c_2] \subset f([a, b]),$$

esto implica que existen dos intervalos cerrados,

$$J \subset [b, c] \text{ y } K \subset [a, b]$$

tales que $f(J) = f(K) = [b_2, c_2]$.
Dado que c no está en $[b_2, c_2]$, $f(b)$ no pertenece a $[b_2, c_2]$. Esto implica que b no está en J ni en K. Así, los intervalos J y K son ajenos y están contenidos en el intervalo $[a, c]$.
Además, estos conjuntos cumplen que

$$f^3(J) = f^3(K) = [a, c].$$

Por el Lema 80 y la Proposición 73 obtenemos que

$$ent(f) \geq \frac{\log(2)}{3}.$$

Por lo tanto, la entropía de la función f es positiva. □

Proposición 89. *Sean A un intervalo compacto y $f : A \longrightarrow A$ una funcion continua. Si f tiene un punto periódico de periodo m tal que m no es potencia de 2, entonces la entropía de f es positiva*

Demostración. Como m no es potencia de 2, por el Teorema de Sharkovskii (33), existe $k \in \mathbb{N}$ tal que f tiene un punto periódico de periodo $2^k \cdot 3$. Por lo tanto la iteración f^{2^k} tiene un punto de periodo 3. Por la Proposición 88, $ent\left(f^{2^k}\right) > 0$. Y, por la Proposición 73, $ent(f) > 0$. □

Ahora enunciamos el concepto de transitividad topológica para posteriormente ver la relación de esta con la entropía.

Definición 90. *Sean X un espacio métrico y $f : X \longrightarrow X$ una función continua en X. Decimos que f es* topológicamente transitiva *en X (o transitiva en X) si para todo par de conjuntos abiertos no vacíos de X , digamos U y V, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V$ es distinto del conjunto vacío.*

Ejemplo 91. *La función Tienda es transitiva en el intervalo $[0,1]$.*
En efecto, sean U y V dos subconjuntos de $[0,1]$ abiertos y no vacíos. Entonces existe un intervalo abierto (a,b), $a < b$, contenido en U. Por el Corolario 83 , existe $N \in N$ tal que

$$T^N((a,b)) = [0,1].$$

De aquí se sigue que $T^N(U) = [0,1]$. Por tanto, $T^N(U) \cap V$ es distinto del vacío.

Recordemos que una consecuencia del Teorema del valor intermedio es que toda función continua, definida en un intervalo cerrado, tiene un punto fijo, el cual puede ser uno de los puntos extremos del intervalo. Sin embargo, si pedimos que la función sea topológicamente transitiva, la siguiente proposición garantiza que el punto fijo se encuentra en el interior del intervalo.

Proposición 92. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$, $a < b$, una función transitiva en $[a,b]$. Demostrar que existe un punto fijo de f, digamos w, tal que $a < w < b$.*

La siguiente proposición junto con su demostración fue tomada de [4]. En esta se observa la relación entre la entropía positiva y la transitividad topológica.

Proposición 93. *Si la función continua $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es transitiva en $[0,1]$, entonces la entropía de f es positiva.*

Demostración. Por la Proposición 92 sabemos que existe un punto w_0 en el intervalo abierto $(0,1)$ tal que $f(w_0) = w_0$.

En nuestra demostración consideraremos varios casos.

Caso 1. Existe $w_1 \in (0,1)$, distinto de w_0, tal que $f(w_1) = w_0$.

Subcaso 1a. $0 < w_1 < w_0$.

Para los abiertos (w_1, w_0) y $(0, w_1)$, como f es transitiva, existen x, $w_1 < x < w_0$, y $m \in \mathbb{N}$ tales que $0 < f^m(x) < w_1$. Sea $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (x-\delta, x+\delta) \subset (w_1, w_0)$ se tiene que $f^m(t) < w_1$.

Obsérvese que

$$f^m(x-\delta) \leq w_1 \text{ y } f^m(x+\delta) \leq w_1.$$

Hagamos $B_1 = [w_1, x-\delta]$ y $B_2 = [x+\delta, w_0]$. Dado que $f^m(w_1) = w_0 = f^m(w_0)$ y $B_1 \cup B_2 \subset [w_1, w_0]$, se tiene que $B_1 \cup B_2 \subset f^m(B_1)$ y $B_1 \cup B_2 \subset f^m(B_2)$.

Y por el Lema 80, $ent(f^m) > 0$ (ya que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$). Así, $ent(f) > 0$.

Subcaso 1b. $w_0 < w_1 < 1$.

Como f es transitiva, existen x, $w_0 < x < w_1$, y $m \in \mathbb{N}$ tales que $w_1 < f^m(x) < 1$.

Sea $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (x-\delta, x+\delta) \subset (w_0, w_1)$ se tiene que $f^m(t) > w_1$.

Así,

$$f^m(x-\delta) \geq w_1 \text{ y } \ f^m(x+\delta) \geq w_1.$$

Sean, ahora $B_1 = [w_0, x-\delta]$ y $B_2 = [x+\delta, w_1]$.

Analógo al Subcaso 1a. se tiene que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Dado que $B_1 \cup B_2 \subset [w_0, w_1]$ y $f^m(w_1) = w_0 = f^m(w_0)$ se tiene que $B_1 \cup B_2 \subset f^m(B_1)$ y $B_1 \cup B_2 \subset f^m(B_2)$.

Nuevamente por el Lema 80, la entropía de f^m y la de f son positivas.

Caso 2. No existe $w \in (0,1)$, $w \neq w_0$, tal que $f(w) = w_0$.

Sean

$$I_0 = [0, w_0] \text{ y } I_1 = [w_0, 1].$$

Observemos que para cualquier par de puntos, s y t en I_0 no puede suceder que $f(s) < w_0 < f(t)$ ya que, por el Teorema del valor Intermedio, esto nos llevaría a concluir la existencia de un punto $w \in (1,0)$, tal que $f(w) = w_0$, con w distinto a w_0, lo que contradice la hipótesis.

Por lo tanto,

$$f(I_0) \subset I_0 \text{ ó } f(I_0) \subset I_1.$$

Situación análoga se vive en el intervalo I_1.

Como f es *transitiva* en $[0,1]$ concluimos que

$$f(I_0) \subset I_1 \text{ y } f(I_1) \subset I_0.$$

Entonces,

$$f^2(I_0) \subset I_0 \text{ y } f^2(I_1) \subset I_1.$$

Notemos que para todo número par n se tiene que $f^n(I_0) \subset I_0$, y para todo número impar n se tiene que $f^n(I_0) \subset I_1$.

Sean a, b, c y d tales que

$$0 < a < b < w_0 \text{ y } 0 < c < d < w_0.$$

Como f es transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n((a,b)) \cap (c,d)$ es distinto del vacío.

Como $(c,d) \cap I_1 = \emptyset$, entonces n es par, digamos $n = 2m$. Por lo tanto,

$(f^2)^m((a,b))\cap(c,d)$ es distinto del conjunto vacío. Esto implica que la función f^2 es transitiva en I_0. Y utilizando nuevamente la Proposición 92 concluimos que existe un punto w_1 en el intervalo abierto $(0,w_0)$ tal que $f^2(w_1)=w_1$. Observemos que tanto w_0 como w_1 son ambos puntos fijos de la función f^2. Si

$$f^2([w_1,w_0])\subset[w_1,w_0],$$

entonces f^2 no sería transitiva en I_0. Por lo tanto, existe w_2, $w_1<w_2<w_0$ tal que $f^2(w_2)=w_1$.
Y así arribamos a la situación análoga al Subcaso 1b., ahora para la función f^2.
Entonces, existen $N\in\mathbb{N}$ y dos intervalos cerrados en $[w_1,w_2]$, digamos J y K, tales que $J\cap K=\emptyset$ y

$$J\cup K\subset f^{2N}(J) \text{ y } J\cup K\subset f^{2N}(K).$$

De donde se concluye que la entropía de f es positiva. $\square$

Una forma de describir la presencia de muchos puntos con órbitas demasiado complejas y hasta cierto punto extrañas, es a través del concepto del caos, la definición que se enuncia en este trabajo es la dada por R. L. Devaney en 1985, véase [3]. Antes de dar el concepto, primero enunciamos el concepto de sensibilidad a las condiciones iniciales.

Definición 94. *Sea $f:X\to X$ una función continua en X. Decimos que f es sensible a las condiciones iniciales en X si existe $\epsilon>0$, tal que para toda $x\in X$, y para toda $\delta>0$, existen $y\in B(x,\delta)$ y $n\in\mathbb{N}$ tales que*

$$d(f^n(x),f^n(y))\geq\epsilon.$$

Definición 95. *Sea $f : X \longrightarrow X$ una función continua definida sobre un espacio métrico sin puntos aislados. Decimos que f es una función* caótica, *o que genera un sistema dinámico caótico, en X si se cumplen las siguientes tres condiciones:*

(1) *El conjunto $Per(f)$ forma un conjunto denso en X,*

(2) *f es transitiva en X,*

(3) *f es sensible a las condiciones iniciales en X.*

Teorema 96. *Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua. Si f es caótica en $[0,1]$ entonces la entropía de f es positiva.*

Demostración. Como f es caótica en $[0,1]$, entonces f es transitiva en $[0,1]$. De la Proposición 93 se sigue que la entropía de f es positiva. $\square$

El siguiente teorema muestra la relación que existe entre la entropía positiva y la caoticidad de una función continua definida en un intervalo compacto, la demostración de este resultado puede ser consultada en [1].

Teorema 97. *Sea A un intervalo compacto y $f : A \longrightarrow A$ una función continua. La entropía de f es positiva si y sólo si existe un conjunto cerrado $B \subset A$, invariante bajo f, tal que f restringida a B es caótica en B.*

Notemos que aplicando este resultado, el Teorema 96 en realidad es una equivalencia.

Finalizamos este trabajo mostrando una función cuya entropía es infinita.

Definición 98. *Consideremos el intervalo I=[0,1]. definamos a*

$$\mathcal{Q} = \prod_{n=0}^{\infty} I.$$

A $\mathcal{Q}$ se le conoce como el cubo de Hilbert*.*

Definición 99. *Sea $\sigma : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}$, definida por*

$$\sigma(t) = \sigma(t_0, t_1, t_2, ...) = (t_1, t_2, t_3, ...).$$

A esta función se le conoce como la función corrimiento.

Proposición 100. *La entropía de σ es infinita.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Consideremos los siguientes k subconjuntos de $\mathcal{Q}$, A_1,A_2,...,A_k, definidos de la siguiente manera:
Para cada $1 \leq i \leq k$, sea

$$A_i = \left\{ t = (t_0, t_1, t_2, ...) \in \mathcal{Q} : t_0 = \frac{i}{k} \right\}.$$

Afirmación: Cada A_i es un subconjunto cerrado de $\mathcal{Q}$.
Para probar esto, basta ver que el subconjunto $\{a\} \times I \times I \times \cdots$ donde $a \in I$ es un conjunto cerrado.
Tenemos que $I \setminus \{a\} = [0, a) \cup (a, 1] \in \tau$, pues $[0, a)$ y $(a, 1]$ son abiertos en I. Por tanto $I \setminus \{a\}$ es abierto, así $\{a\}$ es cerrado.
Por último, sabemos que el producto cartesiano de una cantidad numerable de conjuntos cerrados es un cerrado, por lo tanto $\{a\} \times I \times I \times \cdots$ es cerrado.
Por lo que se concluye nuestra afirmación.

Afirmación: $\prod_{n=0}^{\infty}(I \setminus B_n) = \mathcal{Q} \setminus A_i$.

Con esto, concluimos que $Q \setminus A_i$ es abierto, por lo tanto, A_i es un conjunto cerrado.
Afirmación: Si i es distinto a j, entonces $A_i \cap A_j = \emptyset$.
En efecto, si suponemos que $A_i \cap A_j$ es distinto del conjunto vacío, entonces

existe almentos un $t \in \mathcal{Q}$, tal que t pertecese a A_i y A_j, es decir, $t_0 = \frac{i}{k} = \frac{j}{k}$, así $i = j$ lo que contradice la hipótesis de la afirmación.

Por ultimo, probemos que para cada i, $\sigma(A_i) = \mathcal{Q}$.

Sea $t = (t_1, t_2, ...) \in \mathcal{Q}$, consideremos a $t' = \left(\frac{i}{k}, t_1, t_2, ...\right) \in A_i$, entonces $\sigma(t') = t$, esto implica que $t \in \sigma(A_i)$, por lo tanto $\mathcal{Q} \subset \sigma(A_i)$. Además, dado que $\sigma(A_i) \subset \mathcal{Q}$ se concluye la igualdad.

Entonces, por el Lema 80, $ent(\sigma) \geq \log(k)$. Como esto sucede para cada $k \in \mathbb{N}$, la entropia de σ es infinita. $\square$

Bibliografía

[1] L. S. Block, W. A. Coppel, *Dinamics in one dimension*, Lecture Notes in Math, 1513, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[2] M. Denker, Ch. Grillenberger, K. Sigmund, *Ergodic theory on compact spaces*, Lecture Notes in Math, 527, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[3] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, Redwood City, CA, USA, 1989.

[4] J. E. King Dávalos, H. Méndez Lango *Sistemas dinámicos discretos*, las prensas de ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2015.

[5] J. Munkres, *Topología*, Pentrice Hall, España, 2002.